

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.01.010

# 具有强 Allee 效应的野生蚊子和 绝育蚊子相互作用模型<sup>①</sup>

罗育东, 张国洪

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

**摘要:** 假设野生蚊子具有强 Allee 效应, 建立了包括野生蚊子和绝育蚊子相互作用的连续时间动力学模型. 通过研究系统的动力学性态, 包括分析平衡点的存在性、稳定性, 发现系统在一定条件下存在双稳定现象, 并得到了不同野生蚊子释放策略条件下控制与消灭野生蚊子种群的阈值条件, 同时借助数值模拟验证了相关的理论结果.

**关键词:** 绝育昆虫技术; 释放策略; 强 Allee 效应; 稳定性

**中图分类号:** O175

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2019)01-0065-07

SIT 是对抗蚊子传播疾病的最有效武器, 并在实验室研究中表现出很大前景, 而且部分文献已经应用数学模型研究 SIT 技术对野生蚊子控制的影响<sup>[1-6]</sup>. 特别地, 文献[4]在假设蚊子种群具有弱 Allee 效应的条件下建立了包括野生蚊子和绝育蚊子的二维动力学模型, 研究了不同的绝育蚊子的释放策略对系统动力学性态的影响. 弱 Allee 效应是指当种群的密度过于稀疏时, 增长率会变小, 但不会出现负增长的情况. 当种群具有强 Allee 效应时, 若它的密度小于某个临界值, 则种群将出现负增长率. 本文考虑野生蚊子种群具有强 Allee 效应, 同时假设其按照 logistic 增长<sup>[7]</sup>, 构造出如下包括野生蚊子和绝育蚊子的连续时间动力学模型:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = C(N) \frac{aw}{w+g} (\omega - m) \left(1 - \frac{w}{k}\right) w - \mu_1 w \\ \frac{dg}{dt} = B(\cdot) - \mu_2 g \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $w(t)$  和  $g(t)$  分别代表  $t$  时刻野生蚊子和绝育蚊子的数量;  $N = w + g$ ,  $C(N)$  代表单位时间内蚊子相互交配的次数;  $a$  为每次交配后所产生的野生后代蚊子的数量;  $k$  为环境最大容纳量;  $m$  是反映 Allee 效应强度的参数, 这里假设  $0 < m < k$ ;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  分别为野生蚊子和绝育蚊子的自然死亡率;  $B(\cdot)$  为绝育蚊子的释放策略函数. 本文考虑  $C(N) = c$ ,  $c$  为常数, 并把  $c$  和  $a$  合并为  $a$ , 且假设  $a > \mu_1$ , 否则在没有释放绝育蚊子条件下野生蚊子也将灭绝.

## 1 常数释放策略

假设在模型(1)中对绝育蚊子采取常数释放策略, 即有  $B(\cdot) = b_0$ , 则可得如下相应动力学模型:

① 收稿日期: 2017-12-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701472).

作者简介: 罗育东(1991-), 男, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者: 张国洪, 副教授.

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{a\omega}{\omega + g}(\omega - m)\left(1 - \frac{\omega}{k}\right)\omega - \mu_1\omega \\ \frac{dg}{dt} = b_0 - \mu_2 g \end{cases} \quad (2)$$

定义集合  $\Omega_1$ :

$$\Omega_1 = \left\{ (\omega, g) : 0 \leq \omega \leq k, 0 \leq g \leq \frac{b_0}{\mu_2} \right\}$$

容易验证  $\Omega_1$  是系统(2)的正不变集,因而本节下面的分析都将在  $\Omega_1$  内进行.

### 1.1 平衡点的存在性

容易得到系统(2)存在一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$ , 其中  $g^0 = \frac{b_0}{\mu_2}$ . 系统(2)的正平衡点满足

$$\begin{cases} \frac{a\omega}{\omega + g}(\omega - m)\left(1 - \frac{\omega}{k}\right)\omega - \mu_1\omega = 0 \\ b_0 - \mu_2 g = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由(3)式可以得到

$$F(\omega) \equiv a\omega^3 - a(k+m)\omega^2 + (amk + \mu_1 k)\omega + \frac{\mu_1 k b_0}{\mu_2} = 0$$

则有

$$F'(\omega) = 3a\omega^2 - 2a(k+m)\omega + (amk + \mu_1 k)$$

令

$$\beta = \frac{3\mu_1 k}{k^2 + m^2 - mk}$$

则当  $a \leq \beta$  时,  $F'(\omega) \geq 0$ , 知  $F(\omega)$  为单调递增函数. 又由  $F(0) > 0$ ,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = \infty$$

知此时系统(2)没有正平衡点.

当  $a > \beta$  时, 存在  $\omega_2 > \omega_1 > 0$ , 使得

$$F'(\omega_1) = F'(\omega_2) = 0$$

其中

$$\omega_{1,2} = \frac{a(k+m) \mp \sqrt{a^2(k+m)^2 - 3a(amk + \mu_1 k)}}{3a}$$

容易验证  $\omega_1, \omega_2$  分别为  $F(\omega)$  极大值和极小值点. 定义

$$\tilde{b} = \frac{\mu_2}{\mu_1 k} [-a\omega_2^2 + a(k+m)\omega_2 - (amk + \mu_1 k)]\omega_2$$

当  $F(\omega_2) > 0$ , 即  $b_0 > \tilde{b}$  时, 系统(2)没有正平衡点; 当  $F(\omega_2) = 0$ , 即  $b_0 = \tilde{b}$  时, 系统(2)有且仅有一个正平衡点  $E(\omega_2, g^0)$ ; 当  $F(\omega_2) < 0$ , 即  $b_0 < \tilde{b}$  时, 系统(2)有两个正平衡点  $E_1(\overline{\omega}_1, g^0)$  和  $E_2(\overline{\omega}_2, g^0)$ ,  $\overline{\omega}_1 < \omega_2 < \overline{\omega}_2$ . 则我们可得如下结果.

**定理 1** (i) 当  $a \leq \beta$  时, 系统(2)有且仅有一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$ , 无正平衡点.

(ii) 当  $a > \beta$ ,  $b_0 > \tilde{b}$  时, 系统(2)有且仅有一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$ , 无正平衡点.

(iii) 当  $a > \beta$ ,  $b_0 = \tilde{b}$  时, 系统(2)存在一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$  和一个正平衡点  $E(\omega_2, g^0)$ .

(iv) 当  $a > \beta$ ,  $b_0 < \tilde{b}$  时, 系统(2)存在一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$  和两个正平衡点  $E_1(\overline{\omega}_1, g^0)$ ,

$E_2(\bar{w}_2, g^0)$ .

## 1.2 平衡点的稳定性

系统(1) 在  $E_0$  处的雅可比矩阵为:

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

由于  $J_0$  的特征值为  $-\mu_1 < 0$ ,  $-\mu_2 < 0$ , 因此  $E_0$  是局部渐进稳定的. 特别地当  $a \leq \beta$  时,  $E_0(0, g^0)$  是系统(2) 唯一的平衡点, 可知此时  $E_0$  是全局渐进稳定的; 类似地, 当  $a > \beta$ ,  $b_0 > \tilde{b}$  时,  $E_0$  也是全局渐进稳定的.

下面讨论正平衡点的稳定性. 对于  $a > \beta$ ,  $b_0 < \tilde{b}$ , 系统(1) 在正平衡点处的雅可比矩阵为:

$$J_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a\omega^4 - a(m+k)\omega^3 + amk\omega^2}{k(\omega+g)^2} \\ 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{11} = \frac{g(-4a\omega^3 + 3a(m+k)\omega^2 - 2amk\omega) + (-3a\omega^4 + 2a(m+k)\omega^3 - amk\omega^2)}{k(\omega+g)^2} - \mu_1$$

经计算可得  $J_1$  的行列式为:

$$\det J_1 = \mu_1 \mu_2 + \frac{\mu_2 g(4a\omega^3 - 3a(m+k)\omega^2 + 2amk\omega) + \mu_2(3a\omega^4 - 2a(m+k)\omega^3 + amk\omega^2)}{k(\omega+g)^2} = \frac{\mu_2 g F(\omega) + \mu_2 \omega(\omega+g) F'(\omega)}{k(\omega+g)^2}$$

由  $F(\bar{w}_1) = 0$ ,  $F'(\bar{w}_1) < 0$ , 有  $\det J_1(E_1) < 0$ , 从而知平衡点  $E_1$  是个鞍点.

由  $F(\bar{w}_2) = 0$ ,  $F'(\bar{w}_2) > 0$ , 有  $\det J_1(E_2) > 0$ ; 从而由  $-\mu_2 < 0$  知  $a_{11} < 0$ , 得  $\text{tr} J_1(E_2) < 0$ , 知平衡点  $E_2$  是局部渐进稳定的.

对于  $a > \beta$ ,  $b_0 = \tilde{b}$ , 系统(2) 存在一个边界平衡点  $E_0(0, g^0)$  和一个正平衡点  $E(w_2, g^0)$ , 由  $F(w_2) = 0$ ,  $F'(w_2) = 0$ , 有  $\det J_1(E) = 0$ , 从而可得  $J_1(E)$  的特征值为  $a_{11} = 0$ ,  $-\mu_2 < 0$ , 从而知平衡点  $E$  是局部稳定的. 最终我们得如下定理 2.

**定理 2** 设系统(2) 满足初始条件  $(w(0), g(0)) \geq (0, 0)$ , 则下面结论成立.

- (i) 边界平衡点  $E_0$  是局部渐进稳定的.
- (ii) 当  $a > \beta$  且  $b_0 > \tilde{b}$  或  $a \leq \beta$  时, 边界平衡点  $E_0$  是全局渐进稳定的.
- (iii) 当  $a > \beta$ ,  $b_0 = \tilde{b}$  时, 正平衡点  $E$  是稳定的.
- (iv) 当  $a > \beta$ ,  $b_0 < \tilde{b}$  时, 正平衡点  $E_1$  是个鞍点,  $E_2$  局部渐进稳定.

从定理 2 可见, 当  $a > \beta$ ,  $b_0 < \tilde{b}$  时, 系统存在双稳定现象. 当绝育蚊子释放率充分大 ( $b_0 > \tilde{b}$ ) 时, 野生蚊子种群一定会灭绝; 当绝育蚊子释放率小于某个阈值 ( $b_0 < \tilde{b}$ ) 时, 野生蚊子种群是否会灭绝取决于初始条件.

## 1.3 数值模拟

取定参数为  $a = 1$ ,  $\mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 0.4$ ,  $m = 1$ ,  $k = 10$ , 可得系统(2) 关于参数  $b_0$  的分支图, 其中  $\tilde{b} = 7.413$ . 取定  $b_0 = 1$ , 借助 pplane 软件得到系统(2) 的平面相图.

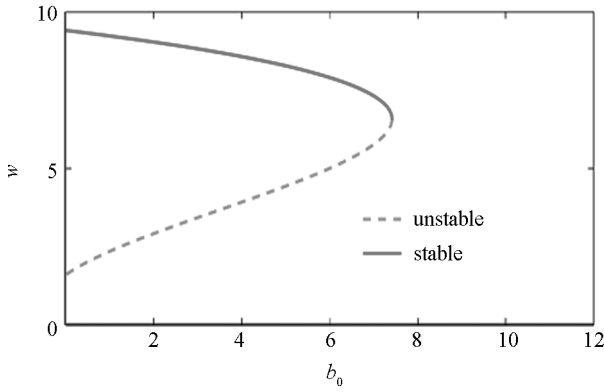


图 1 系统(2)分支图

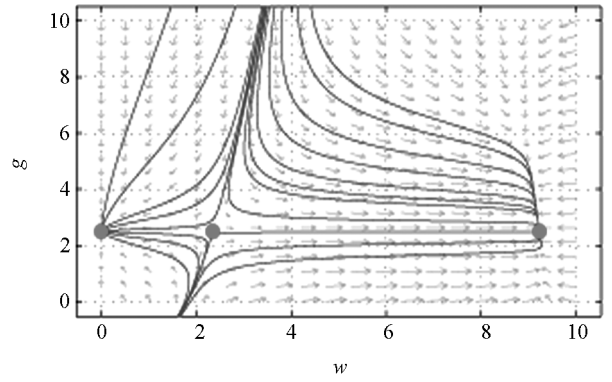


图 2 系统(2)平面相图

当  $b_0 > \tilde{b}$  时, 系统(2) 只存在唯一渐进稳定的边界平衡点  $E_0$ ; 当  $b_0 < \tilde{b}$  时, 除局部渐进稳定的边界平衡点  $E_0$  外, 系统还存在两个正平衡  $E_1$  和  $E_2$ , 其中  $E_2$  局部渐进稳定,  $E_1$  是个鞍点, 即这时系统(2) 存在双稳定现象. 当  $b_0 = 1$  时, 在平面相图中边界平衡点  $E_0 = (0, 2.5)$ , 正平衡点  $E_1 = (2.349, 2.5)$ ,  $E_2 = (9.2277, 2.5)$ .

## 2 比例释放策略

假设在模型(1) 中对绝育蚊子采取比例释放策略, 即有  $B(\cdot) = b_1 w$ , 则相应系统为:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{aw}{w+g}(\omega - m)\left(1 - \frac{w}{k}\right)w - \mu_1 w \equiv F(w, g) \\ \frac{dg}{dt} = b_1 w - \mu_2 g \equiv G(w, g) \end{cases} \quad (4)$$

定义集合  $\Omega_2$

$$\Omega_2 = \left\{ (w, g) : 0 \leq w \leq k, 0 \leq g \leq \frac{b_1 k}{\mu_2} \right\}$$

容易验证  $\Omega_2$  是系统(4) 的正不变集, 因而本节下面的分析都将在  $\Omega_2$  内进行.

### 2.1 平衡点的存在性

参考文献[8], 我们假设  $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ , 从而知  $F(w, g)$  与  $G(w, g)$  在  $\{(w, g) : w \geq 0, g \geq 0\}$  上是连续的. 在下文中总是假设初始条件  $w(0) > 0, g(0) > 0$  成立.

系统(4) 的正平衡点满足

$$\begin{cases} \frac{aw}{w+g}(\omega - m)\left(1 - \frac{w}{k}\right)w - \mu_1 w = 0 \\ b_1 w - \mu_2 g = 0 \end{cases} \quad (5)$$

由(5) 式可以得到

$$G(w) \equiv [a\mu_2 w^2 - a\mu_2(k+m)w + (a\mu_2 mk + \mu_1 \mu_2 k + \mu_1 b_1 k)]w = 0$$

定义判别式

$$\Delta \equiv a^2 \mu_2^2 (m+k)^2 - 4a\mu_2 (a\mu_2 mk + \mu_1 \mu_2 k + \mu_1 b_1 k)$$

当  $\Delta < 0$ , 即

$$b_1 > \frac{a\mu_2(m+k)^2 - 4(a\mu_2 mk + \mu_1 \mu_2 k)}{4\mu_1 k}$$

时, 系统(4) 没有正平衡点. 当  $\Delta = 0$ , 即

$$b_1 = \frac{a\mu_2(m+k)^2 - 4(a\mu_2 mk + \mu_1 \mu_2 k)}{4\mu_1 k}$$

时, 系统(4) 有且只有一个正平衡点  $E^*(w^*, g^*)$ , 其中

$$w^* = \frac{m+k}{2}$$

$$g^* = \frac{b(m+k)}{2\mu_2}$$

若  $\Delta > 0$ , 即

$$b_1 < \frac{a\mu_2(m+k)^2 - 4(a\mu_2mk + \mu_1\mu_2k)}{4\mu_1k}$$

时, 系统(4) 有两个正平衡点  $E_1^*(w_1^*, g_1^*)$  和  $E_2^*(w_2^*, g_2^*)$ , 其中

$$w_{1,2}^* = \frac{a\mu_2(m+k) \mp \sqrt{\Delta}}{2a\mu_2}$$

$$g_{1,2}^* = \frac{a\mu_2b_1(m+k) \mp b_1\sqrt{\Delta}}{2a\mu_2^2}$$

定义

$$\bar{b} = \frac{a\mu_2(m+k)^2 - 4(a\mu_2mk + \mu_1\mu_2k)}{4\mu_1k}$$

我们得到如下定理.

**定理 3** (i) 当  $b_1 > \bar{b}$  时, 系统(4) 无正平衡点.

(ii) 当  $b_1 = \bar{b}$  时, 系统(4) 有且只有一个正平衡点  $E^*(w^*, g^*)$ .

(iii) 当  $b_1 < \bar{b}$  时, 系统(4) 存在两个正平衡点  $E_1^*(w_1^*, g_1^*)$  和  $E_2^*(w_2^*, g_2^*)$ .

## 2.2 平衡点的稳定性

在  $(0, 0)$  处, 由于第一个方程分母为零, 我们无法研究其线性稳定性. 如果假设  $0 < w(0) < m$ , 则有

$$\frac{dw}{dt} < \frac{aw}{w+g}(w-m)\left(1 - \frac{w}{k}\right)w < 0$$

知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

所以对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists T$ , 当  $t > T$  时, 有  $w < \varepsilon$ , 也就有

$$\frac{dg}{dt} = b_1w - \mu_2g < b_1\varepsilon - \mu_2g$$

从而由  $g(0) > 0$  和比较原理知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

我们可以得到如下结果.

**定理 4** 设系统(4) 初始条件满足  $0 < w(0) < m$  和  $g(0) > 0$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

下面讨论正平衡点的稳定性. 当  $b_1 < \bar{b}$ , 可以得到系统(4) 关于正平衡点的雅可比矩阵:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{g[-4aw^3 + 3a(m+k)w^2 - 2amkw] + [-3aw^4 + 2a(m+k)w^3 - amkw^2]}{k(w+g)^2} - \mu_1 & \frac{aw^4 - a(m+k)w^3 + amkw^2}{k(w+g)^2} \\ b_1 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

经计算可得  $J_2$  的行列式为:

$$\det J_2 = \mu_1\mu_2 + \frac{\mu_2w}{k(w+g)^2} [g(4aw^2 - 3a(m+k)w + 2amk) + (3aw^3 - 2a(m+k)w^2 + amkw) - b_1(aw^4 - a(m+k)w^3 + amkw^2)] =$$

$$\frac{w}{k(w+g)}G'(w)$$

容易验证当  $b_1 < \bar{b}$  时,

$$G(w_1^*) = G(w_2^*) = 0$$

且

$$G'(w_1^*) < 0 \quad G'(w_2^*) > 0$$

从而有  $\det \mathbf{J}_2(E_1^*) < 0$ ,  $\det \mathbf{J}_2(E_2^*) > 0$ . 知平衡点  $E_1^*$  是个鞍点. 又由矩阵  $\mathbf{J}_2$  的迹为:

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{J}_2 &= \frac{g[-4aw^3 + 3a(m+k)w^2 - 2amkw] + [-3aw^4 + 2a(m+k)w^3 - amkw^2]}{k(w+g)^2} - \mu_1 - \mu_2 = \\ &= -\frac{A}{\mu_2 k(w+g)^2} \end{aligned}$$

其中

$$A = w(w+g)G'(w) + k(\mu_2^2 - \mu_1 b_1)(w^2 + 2wg) + k(\mu_2^2 g + \mu_1 b_1 w)g$$

从而可得如下定理 5.

**定理 5** 假设  $b_1 < \bar{b}$ . 正平衡点  $E_1^*$  是个鞍点; 当  $A(E_2^*) > 0$  时,  $E_2^*$  是个局部渐进稳定的平衡点. 当  $b_1 = \bar{b}$  时,  $G(w^*) = 0$ , 且

$$G'(w^*) = 0$$

从而有

$$\det \mathbf{J}_2(E^*) = 0$$

知  $\mathbf{J}_2$  有 0 特征值. 因而当  $A(E^*) > 0$  时, 即  $\text{tr} \mathbf{J}_2(E^*) < 0$  时, 知  $E^*$  是稳定的. 从而可得如下定理 6.

**定理 6** 假设  $b_1 = \bar{b}$ , 当  $A(E^*) > 0$  时,  $E^*$  是个局部稳定的平衡点.

### 2.3 数值模拟

为了验证上述理论分析, 我们取定参数为  $a = 1$ ,  $\mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 0.8$ ,  $m = 1$ ,  $k = 10$ , 可得系统(4)关于参数  $b_1$  的分支图, 其中  $\bar{b} = 2.44$ . 取定  $b_1 = 1$ , 得到系统(4)的平面相图.

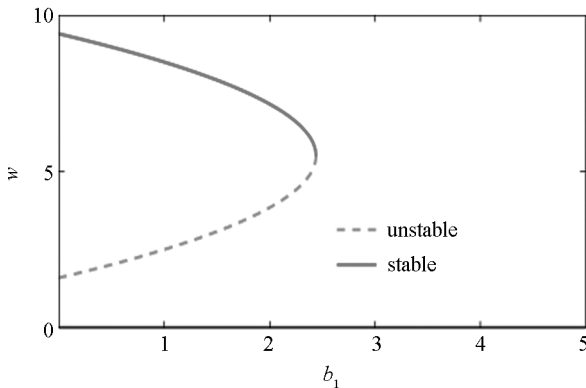


图 3 系统(4)分支图

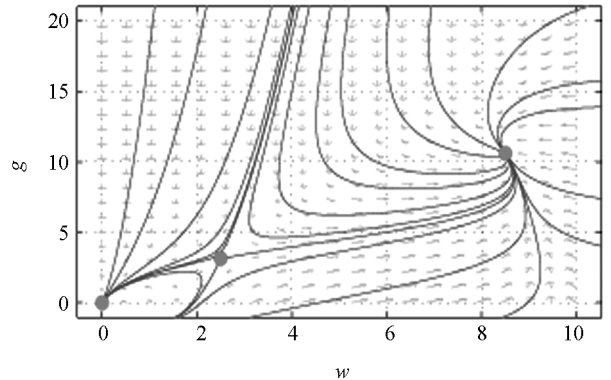


图 4 系统(4)平面相图

可见当  $b_0 > \bar{b}$  时, 系统只有  $(0, 0)$  平衡点; 当  $b_0 < \bar{b}$  时, 这时系统会出现双稳定现象, 即  $(0, 0)$  和  $E_2^*$  都是局部渐进稳定的. 在平面相图中, 平衡点  $(0, 0)$  是局部渐进稳定的, 正平衡点  $E_1^* = (2.5, 3.125)$  是个鞍点,  $E_2^* = (8.5, 10.625)$  是局部渐进稳定的.

## 3 结 论

绝育昆虫技术应用于控制或根除野生蚊子在理论和实践当中都被证明是有效的. 然而不同释放策略的选择和相应效果的评估是困难的. 在本文中, 我们在具有 logistic 增长和强 Allee 效应的蚊子种群中引入了绝育昆虫释放技术, 建立动力学模型, 讨论了常数释放和比例释放策略条件下野生蚊子种群的动力学行

为. 通过研究平衡点的存在性和稳定性, 我们在两种释放策略条件下都得到了一个临界释放系数  $\tilde{b}$  和  $\bar{b}$ . 我们发现在两个系统(2)和(4)中, 当绝育蚊子释放系数充分大时, 能够导致野生蚊子种群的灭绝; 当释放系数较小时, 两个系统都会出现双稳定现象, 也即是说野生蚊子是否灭绝取决于初始条件的大小. 上述研究结果为我们使用绝育昆虫技术控制或根除野生蚊子提供了有意义的理论指导.

#### 参考文献:

- [1] DUMONT Y, TCHUENCHE J M. Mathematical Studies on the Sterile Insect Technique for the Chikungunya Disease and *Aedes Albopictus* [J]. *J Math Biol*, 2012, 65(5): 809–854.
- [2] BARCLAY H J. Pest Population Stability Under Sterile Releases [J]. *Res. Popul. Ecol*, 1982, 24(2): 405–416.
- [3] ALPHEY L, BENEDICT M, BELLINI R, et al. Sterile-Insect Methods for Control of Mosquito-Borne Diseases: An Analysis [J]. *Vector-Borne Zoonotic Diseases*, 2010, 10(3): 295–311.
- [4] CAI C, AI S, LI J. Dynamics of Mosquitoes Populations with Different Strategies for Releasing Sterile Mosquitoes [J]. *SIAM J Appl Math*, 2014, 74(6): 39–46.
- [5] ESTEVA L, YANG H M. Mathematical Model to Assess the Control of *Aedes Aegypti* Mosquitoes by the Sterile Insect Technique [J]. *Math Biosci*, 2005, 198(2): 132–147.
- [6] FISTER K R, MCCARTHY M L, OPPENHEIMER S F, et al. Optimal Control of Insects Through Sterile Insect Release and Habitat Modification [J]. *Math Biosci*, 2013, 244(2): 201–212.
- [7] 邓迪, 陈阵, 黄华鹰. 某类生物种群模型的动力性研究 [J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2017, 34(6): 42–45.
- [8] KUANG Y, BERETTA E. Global Qualitative Analysis of a Ratio-Dependent Predator-Prey System [J]. *J Math Biol*, 1998, 36(4): 389–406.

## A Model for the Interactive Dynamics of Sterile and Wild Mosquitoes with Strong Allee Effects

LUO Yu-dong, ZHANG Guo-hong

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract:** The sterile insect technique is one of the effective ways to prevent and control mosquito-borne diseases such as malaria and dengue fever. This article assumes that wild mosquitoes have a strong Allee effect and formulates a continuous-time mathematical model for the interactive dynamics of the wild and the sterile mosquitoes. By studying the dynamic state of the system, including analyzing the existence and stability of the equilibria, we find that under certain conditions the system has bi-stability and the threshold conditions for controlling and eliminating wild mosquito populations under different strategies of wild mosquito release are obtained. At the same time, the relevant theoretical results are verified by numerical simulation.

**Key words:** sterile insect technique; releasing strategy; strong Allee effect; stability