

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.01.012

幂赋范极值分布的条件矩刻画^①

彭 茜, 周 玮, 彭作祥

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: $\{X_n\}$ 为独立同分布的离散型随机变量序列, 其分布函数为 $F(x)$. 得到了 $F(x)$ 属于幂赋范极值分布吸引场的条件矩刻画.

关键词: 幂赋范极值分布; 条件矩; 吸引场

中图分类号: O211.3

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2019)01-0078-06

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量序列, 公共分布函数 $F(x)$, 记其部分最大值 $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$, 若存在规范化常数序列 $\alpha_n > 0, \beta_n > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq \alpha_n | x |^{\beta_n} \text{sign}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\alpha_n | x |^{\beta_n} \text{sign}(x)) = H(x) \quad (1)$$

其中 $\text{sign}(x)$ 是符号函数, $H(x)$ 为非退化分布函数, 且如果(1)式成立, 则称 $F(x)$ 属于幂赋范极值分布 $H(x)$ 的吸引场, 记作 $F \in D_p(H)$. 由文献[1]可知, $H(x)$ 是以下 6 种类型之一:

$$\begin{aligned} \text{I: } H_{1,\alpha}(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \exp(-(\log x)^{-\alpha}) & x > 1 \end{cases} \\ \text{II: } H_{2,\alpha}(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-(-\log x)^\alpha) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \\ \text{III: } H_{3,\alpha}(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \exp(-(-\log(-x))^{-\alpha}) & -1 < x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \\ \text{IV: } H_{4,\alpha}(x) &= \begin{cases} \exp(-(\log(-x))^\alpha) & x \leq -1 \\ 1 & x \geq -1 \end{cases} \\ \text{V: } \Phi(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases} \\ \text{VI: } \Psi(x) &= \begin{cases} \exp(x) & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 α 为大于 0 的常数.

文献[2]研究了 6 种类型的分布函数属于幂赋范条件下的吸引场的充要条件; 文献[3]研究了在幂赋范下极值的矩收敛和密度函数收敛. 使用条件矩刻画 F 属于给定的极值分布, 在线性赋范情形文献[4]得到 F 属于 Δ 的极值吸引场的条件矩刻画; 文献[5]得到 F 属于 Φ_α 和 Ψ_α 的条件矩刻画. 本文将研究在幂赋范

① 收稿日期: 2017-11-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701469); 重庆市基础与前沿研究计划项目(csts2016jcyjA0510).

作者简介: 彭 茜(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事极值理论研究.

通信作者: 周 玮, 硕士研究生.

条件下, F 分别属于上述 $H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,\alpha}, H_{4,\alpha}, \Psi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 6 种吸引场的条件矩刻画 (见定理 1—定理 6). 为证明主要结论, 需要引用下面的结论.

引理 1^[4] 设 $U: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 且

$$U(t) = \int_t^\infty u(s) ds$$

是有限的. 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tu(t)}{U(t)} = \rho \quad (2)$$

那么 $U(t) \in RV_{-\rho}$. 相反地, 如果 $U(t) \in RV_{-\rho}$, $\rho > 0$, 且 $u(t) > 0$ 为减函数, 那么 (2) 式成立, 且 $u(t) \in RV_{-\rho-1}$.

为统一符号, 定义 $r(F) = \sup \{x \mid F(x) < 1\}$ 为分布函数 $F(x)$ 的上端点.

定理 1 若 $r_F = \infty$. 定义

$$\mu_p(t) = E\{((\log |X|) - t)^p \mid (\log |X|) > t\}$$

如果 $F \in D_p(H_{1,\alpha})$, $\alpha > 2$, 那么对于 $0 \leq p < \alpha - 2$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{(p+2)(\alpha-p-1)}{(p+1)(\alpha-p-2)} \quad (3)$$

反之, 当 $\alpha > 2$ 时, 对 $0 \leq p < \alpha - 2$, 如果 (3) 式成立, 那么 $F \in D_p(H_{1,\alpha})$.

证 关于必要性: 由文献[2]之定理 2.1 知, $F \in D_p(H_{1,\alpha})$ 的充要条件为对于 $y > 0$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\exp(ty))}{1 - F(\exp(t))} = y^{-\alpha}$$

故 $\alpha > 2$ 时有

$$\begin{aligned} \mu_p(t) &= E\{((\log |X|) - t)^p \mid (\log |X|) > t\} = \\ &= \int_{\exp(t)}^\infty \frac{((\log |x|) - t)^p dF(x)}{1 - F(\exp(t))} = pt^p \int_1^\infty (u-1)^{p-1} \frac{1 - F(\exp(tu))}{1 - F(\exp(t))} du \rightarrow \\ &= pt^p \int_1^\infty (u-1)^{p-1} u^{-\alpha} du, \alpha > 0 = \frac{\Gamma(\alpha-p)\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha)} t^p \end{aligned} \quad (4)$$

显然, 这对 $p=0$ 也成立. 由 (4) 式知 (3) 式成立.

对于充分性, 若 (3) 式成立. 定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{\exp(t)}^\infty ((\log |x|) - t)^p dF(x)$$

对任意的 $\delta \geq -1$, 有

$$\begin{aligned} \int_t^\infty (u-t)^\delta J_p(u) du &= \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_t^\infty \int_{\exp(u)}^\infty (u-t)^\delta ((\log |x|) - u)^p dF(x) du = \\ &= \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{\exp(t)}^\infty \int_t^{\log |x|} (u-t)^\delta ((\log |x|) - u)^p du dF(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(p+\delta+2)} \int_{\exp(t)}^\infty ((\log |x|) - t)^{p+\delta} dF(x) = \\ &= \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

特别地, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$J_{p+1}(t) = \int_t^\infty J_p(u) du \downarrow 0 \quad (6)$$

利用以下关系式

$$\mu_p(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{1 - F(\exp(t))} J_p(t)$$

则式 (3) 可写为

$$\frac{J(t)J_{p+2}(t)}{\{J_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{\alpha-p-1}{\alpha-p-2} \quad (7)$$

其中 $0 \leq p < \alpha - 2$.

如果式(7)对 $p=0$ 成立, 那么设 $J_0^*(t) = \frac{J_1^2(t)}{J_2(t)}$, 则 $\frac{J_0(t)}{J_0^*(t)} \rightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha-2}$. 只需证 $J_0^*(t) \in RV_{-\alpha}$. 由于

$$\begin{aligned} (J_0^*(t))' &= \left(\frac{J_1^2(t)}{J_2(t)} \right)' = \frac{J_1^3(t)}{J_2^2(t)} \left(1 - \frac{2J_0(t)J_2(t)}{J_1^2(t)} \right) = \\ &= -\frac{1}{t} J_0^*(t) \frac{t}{f(t)} \left(2 \frac{J_0(t)}{J_0^*(t)} - 1 \right) \end{aligned}$$

其中 $f(t) = \frac{J_2(t)}{J_1(t)}$. 故 $J_0^*(t) = J_0^*(z_0) \exp\left(-\int_{z_0}^t \frac{g(u)}{u} du\right)$, 其中 $g(t) = \frac{t}{f(t)} \left(2 \frac{J_0(t)}{J_0^*(t)} - 1 \right)$. 注意到

$$f'(t) = -1 + \frac{J_0(t)}{J_0^*(t)} \rightarrow \frac{1}{\alpha-2}, \quad g(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha-2}(\alpha-2) = \alpha.$$

由文献[4]的 Karamata 公式可知, $J_0^*(t) \in RV_{-\alpha}$. 假设式(7)对于整数 $0 < p < \alpha - 2$ 成立, 定义

$$J_p^*(t) = \frac{(J_{p+1}(t))^2}{J_{p+2}(t)}$$

那么有

$$\frac{J_p(t)}{J_p^*(t)} \rightarrow \frac{\alpha-p-1}{\alpha-p-2}$$

与 $p=0$ 的方法相同, 很容易得到 $J_p(t) \in RV_{-(\alpha-p)}$. 由式(6)和引理 1, 得 $J_{p-1} \in RV_{-(\alpha-p)-1}$. 将上述步骤重复 p 次, 就得到 $1 - F(\exp(t)) = J_0(t) \in RV_{-\alpha}$.

假设对实数 $0 < p < \alpha - 2$ 式子(7)成立. 与 p 为整数时情况相同, 有 $J_p(t) \in RV_{-(\alpha-p)}$. 不失一般性, 设 $0 < p < 1$. 在 $\delta \geq -1$, $\alpha > \delta + p + 1$ 情况下, 有

$$J_{\delta+p+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_t^\infty (u-t)^\delta J_p(u) du = \frac{t^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)} \int_1^\infty (y-1)^\delta J_p(ty) dy$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{J_{\delta+p+1}(tx)}{t^{\delta+1} J_p(t)} &= \frac{x^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)} \int_1^\infty (y-1)^\delta \frac{J_p(txy)}{J_p(t)} dy \rightarrow \\ &= \frac{x^{-\alpha+p+1+\delta}}{\Gamma(\delta+1)} \int_1^\infty (y-1)^\delta y^{-\alpha+p} dy = \\ &= x^{-\alpha+p+1+\delta} \frac{\Gamma(\alpha-p-\delta-1)}{\Gamma(\alpha-p)} \end{aligned}$$

因此, $J_{\delta+p+1}(t) \in RV_{-\alpha+p+1+\delta}$. 如果 $\delta = -p > -1$, 那么 $J_1(t) \in RV_{-(\alpha-1)}$, 可得

$$1 - F(\exp(t)) = J_0(t) \in RV_{-\alpha}$$

证毕.

定理 2 若 $0 < x_F < \infty$, 定义

$$\mu_p(t) = E \left\{ \left(\left(-\log \left| \frac{X}{r(F)} \right| \right) - \frac{1}{t} \right)^p \mid \left(-\log \left| \frac{X}{r(F)} \right| \right) > \frac{1}{t} \right\}$$

如果 $F \in D_p(H_2, \alpha)$, $\alpha > 2$, 那么对于 $0 \leq p < \alpha - 2$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\mu_p(t) \mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{(p+2)(-\alpha-p-1)}{(p+1)(-\alpha-p-2)} \quad (8)$$

反之, 当 $\alpha > 2$ 时, 对 $0 \leq p < \alpha - 2$, 如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式子(8)成立, 那么 $F \in D_p(H_2, \alpha)$.

证 必要性相的证明似于定理 1 中(4)的证明, 利用文献[2]中定理 2.2 给出的 $F \in D_p(H_2, \alpha)$ 充要条件为当 $y > 0$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F\left(r(F) \exp\left(-\frac{y}{t}\right)\right)}{1 - F\left(r(F) \exp\left(-\frac{1}{t}\right)\right)} = y^\alpha$$

对充分性, 定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{r(F)\exp(-\frac{1}{t})}^{r(F)} \left(\left(-\log \left| \frac{X}{r(F)} \right| \right) - \frac{1}{t} \right)^p dF(x)$$

则

$$\int_t^\infty (u-t)^\delta J_p\left(\frac{1}{u}\right) du = \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (9)$$

类似于定理 1 的证明方法, 可得结论成立.

定理 3 若 $r(F) = 0$, 定义

$$\mu_p(t) = E\left\{ \left((\log | -X |) + t \right)^p \mid (\log | -X |) > -t \right\}$$

如果 $F \in D_p(H_3, \alpha)$, $\alpha > 2$, 那么对于 $0 \leq p < \alpha - 2$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{(p+2)(\alpha-p-1)}{(p+1)(\alpha-p-2)} \quad (10)$$

反之, 当 $\alpha > 2$ 时, 对 $0 \leq p < \alpha - 2$, 如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式(10)成立, 那么 $F \in D_p(H_3, \alpha)$.

证 必要性的证明类似于定理 1 中(4)式的证明, 利用文献[2]中定理 2.3 关于 $F \in D_p(H_3, \alpha)$ 的充要条件为当 $y > 0$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(-\exp(-ty))}{1 - F(-\exp(-t))} = y^{-\alpha}$$

证得(10)式成立. 对充分性, 定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{-\exp(-t)}^0 \left((\log | -x |) + t \right)^p dF(x)$$

则

$$\int_t^\infty (u-t)^\delta J_p(u) du = (-1)^{\delta+1} \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}(t) \quad (11)$$

类似于定理 1 的证明方法, 可得结论成立.

定理 4 若 $r(F) < 0$, 定义

$$\mu_p(t) = E\left\{ \left(\left(-\log \left| \frac{X}{r(F)} \right| \right) + \frac{1}{t} \right)^p \mid \left(-\log \left| \frac{X}{r(F)} \right| \right) > -\frac{1}{t} \right\}$$

如果 $F \in D_p(H_4, \alpha)$, $\alpha > 2$, 那么对于 $0 \leq p < \alpha - 2$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{(p+2)(-\alpha-p-1)}{(p+1)(-\alpha-p-2)} \quad (12)$$

反之, 当 $\alpha > 2$ 时, 对 $0 \leq p < \alpha - 2$, 如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式(12)成立, 那么 $F \in D_p(H_4, \alpha)$.

证 必要性的证明类似于定理 1 中(4)式的证明, 利用文献[2]中定理 2.4 关于 $F \in D_p(H_4, \alpha)$ 的充要条件为当 $y > 0$ 时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F\left(r(F)\exp\left(\frac{y}{t}\right)\right)}{1 - F\left(r(F)\exp\left(\frac{1}{t}\right)\right)} = y^\alpha$$

可证得(12)式成立. 对充分性, 定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{r(F)\exp(\frac{1}{t})}^{r(F)} \left(\left(-\log \left| \frac{x}{r(F)} \right| \right) + \frac{1}{t} \right)^p dF(x)$$

则

$$\int_t^\infty (u-t)^\delta J_p\left(\frac{1}{u}\right) du = (-1)^{\delta+1} \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}\left(\frac{1}{t}\right) \quad (13)$$

类似于定理 1 的证明方法, 可得结论成立.

定理 5 若 $r(F) > 0$, 定义

$$\mu_p(t) = E\left\{ \left(\left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) - f(t) \right)^p \mid \left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) > f(t) \right\}$$

如果 $F \in D_p(\Phi)$, 那么对于 $p \geq 0$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且当 $t \uparrow r(F)$ 时,

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{p+2}{p+1} \quad (14)$$

反之, 对 $p \geq 0$, 如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式(14)成立, 那么 $F \in D_p(\Phi)$.

证 必要性的证明: 由文献[2]定理 2.5 可知, $F \in D_p(\Phi)$ 的等价条件为当 $r(F) > 0$ 时, 存在一个函数 $f > 0$, 使得对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow r(F)} \frac{1 - F(t \exp(xf(t)))}{1 - F(t)} = \exp(-x)$$

成立. 在此条件下, 对某些连续函数 f , 定义

$$f(t) = \frac{1}{F(t)} \int_t^{r(F)} \frac{\bar{F}(s)}{s} ds$$

有

$$\int_t^{r(F)} \frac{\bar{F}(x)}{x} dx < \infty$$

因此有

$$\begin{aligned} \mu_p(t) &= E \left\{ \left(\left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) - f(t) \right)^p \mid \left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) > f(t) \right\} = \\ &= p(f(t))^p \int_1^{\frac{\log |r(F)|}{f(t)}} \frac{1 - F(t \exp(yf(t)))}{1 - F(t \exp(f(t)))} (y-1)^{p-1} dy \sim \\ &= \Gamma(p+1)(f(t))^p, \quad t \uparrow r(F) \end{aligned} \quad (15)$$

由 $f(t)$ 的表达式可知

$$\frac{\log \left| \frac{r(F)}{t} \right|}{f(t)} - 1 \rightarrow \infty (t \uparrow r(F))$$

故(15)式中的渐近式成立. 显然, 式(15)对 $p=0$ 也成立. 由式(15), 可证式(14)成立.

对于充分性的证明, 首先定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{t \exp(f(t))}^{r(F)} \left(\left(\log \left| \frac{x}{t} \right| \right) - f(t) \right)^p dF(x) \quad t < r(F)$$

另外记

$$g_1(t) = \log(t) + f(t)$$

类似于式(5)的方法, 可得

$$\int_t^\infty (u - g_1(t))^{\delta} J_p(g_1^{-1}(u)) du = \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}(g_1(t)) \quad (16)$$

类似于定理 1 的证明过程, 可得结论成立.

定理 6 若 $r(F) \leq 0$, 定义

$$\mu_p(t) = E \left\{ \left(\left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) + f(t) \right)^p \mid \left(\log \left| \frac{X}{t} \right| \right) > -f(t) \right\}$$

如果 $F \in D_p(\Psi)$, 那么对于 $p \geq 0$, $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且当 $t \uparrow r(F)$ 时,

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \rightarrow \frac{p+2}{p+1} \quad (17)$$

反之, 对 $p \geq 0$, 如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且(17)式成立, 那么 $F \in D_p(\Psi)$.

证 必要性的证明: 由文献[2]定理 2.6 可知, $F \in D_p(\Psi)$ 的等价条件为当 $r(F) \leq 0$ 时, 存在一个函数 $f > 0$ 使得对于 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow r(F)} \frac{1 - F(t \exp(xf(t)))}{1 - F(t)} = \exp(x)$$

成立. 在此条件下, 对某些连续函数 f , 定义

$$f(t) = -\frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{r(F)} \frac{\bar{F}(s)}{s} ds$$

有

$$-\int_t^{r(F)} \frac{\bar{F}(x)}{x} dx < \infty$$

成立. 因此有,

$$\mu_p(t) \sim \Gamma(p+1)(-f(t))^p \quad r \uparrow r(F) \quad (18)$$

由(18)式, 可证(17)式成立.

对于充分性的证明, 首先定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1} \int_{t \exp(-f(t))}^{r(F)} \left(\left(\log \left| \frac{x}{t} \right| \right) + f(t) \right)^p dF(x) \quad t < r(F)$$

类似于定理 5, 记 $g_2(t) = \log(t) - f(t)$, 则

$$\int_t^\infty (u - g_2(t))^\delta J_p(g_2^+(u)) du = \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}(g_2(t)) \quad (19)$$

同理可证得结论成立.

参考文献:

- [1] PANTCHEVA E. Limit Theorems for Extreme Order Statistics Under Nonlinear Normalization [M]// KALASHNIKOV V V, ZOLOTATEV V M. Stability Problems for Stochastic Models. Berlin: Springer, 1985: 284-309.
- [2] MOHAN N R, RAVI S. Max Domains of Attraction of Univariate and Multivariate P-Max Stable Laws [J]. Theory of Probability and Its Applications, 1993, 37(4): 632-643.
- [3] PENG Z X, SHUAI Y L, NADARAJAH S. On Convergence of Extremes Under Power Normalization [J]. Extremes, 2013, 16(3): 285-301.
- [4] RESNICK S I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes [M]. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [5] GELUK J L. On The Domain of Attraction of $\exp(-\exp(-x))$ [J]. Statistics and Probability Letters, 1996, 31(2): 91-95.

Conditions Based on Conditional Moments for p -Max Stable Laws Conditional Moment Characterization of Limit Distribution Under Power Normalization

PENG Xi, ZHOU Wei, PENG Zuo-xiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let $\{X_n\}$ be independent and identically distributed random variables with the common distribution function $F(x)$. Necessary and sufficient conditions for F belonging to the domains of attraction of $H_{1,\alpha}$, $H_{2,\alpha}$, $H_{3,\alpha}$, $H_{4,\alpha}$, $\psi(x)$ and $\Phi(x)$ with nondegenerate univariate marginals under power normalization are derived in terms of conditional moments.

Key words: limit distribution under power normalization; conditional moment; domain of attraction