DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.10.007

# 平面凸体的 $\alpha$ -周长及等周不等式①

郭欢欢[1]，　李德宜[1,2]，　邹　都[1]

1. 武汉科技大学 理学院，武汉 430081；2. 武汉科技大学 湖北名师工作室，武汉 430081

**摘要：** Brunn-Minkowski 不等式是凸几何分析的重要研究内容. 目前，关于体积等几何量的 Brunn-Minkowski 不等式已广为人知，并在数学各个分支中扮演着重要的角色. 关于凸体表面积的 Brunn-Minkowski 不等式作为 Aleksandrov-Fenchel 不等式的特殊情况也得到确证. 但在 $L_p$ Brunn-Minkowski 理论中，$L_p$ 表面积测度的 Brunn-Minkowski 不等式仍是一个重要的公开问题，不论是对 $0<p<1$，还是 $p>1$ 的情形，都没有行之有效的方法来证明相关猜测. 基于 Minkowski 加法，利用单调有界定理和积分中值定理研究了平面凸体的 $\alpha$-周长，提出了两凸体关于 $\alpha$-周长的 Brunn-Minkowski 型不等式，并对两凸体分别为正 $n$ 边形和单位圆盘的情形给出了证明.

**关　键　词：** 凸体；$\alpha$-周长；Brunn-Minkowski 不等式

**中图分类号：O186**　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2019)10－0051－05

由 Lutwak 引入并在众多数学家的推动下，Brunn-Minkowski 理论核心在近 20 年内发展成 $L_p$ Brunn-Minkowski 理论(参见文献[1-13]). 该理论中的根本性和基础性概念之一是凸体的 $L_p$ 表面积测度(参见文献[14]). 设 $p\in\mathbb{R}$，$K$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中含原点于内部的凸体，则凸体 $K$ 的 $L_p$ 表面积测度 $S_P(K,\cdot)$ 是单位球面 $S^{n-1}$ 上的 Borel 测度. 对任意 Borel 子集 $\omega\subseteq S^{n-1}$，

$$S_p(K,\omega)=\int_{g_K^{-1}(\omega)}(g_K(x)\cdot x)^{1-p}\,\mathrm{d}\mathscr{H}(x)$$

其中 $g_K$ 是定义在 $\partial K$ 上的广义 Gauss 映射. 围绕 $L_p$ 表面积的 Minkowski 问题(即 $L_p$ Minkowski 问题)是 $L_p$ Brunn-Minkowski 理论的基石(参见文献[15-17]). $L_p$ 表面积测度的总值 $S_p(K,S^{n-1})$ 称为 $K$ 的 $L_p$ 表面积. $L_1$ 表面积是熟知的表面积，而 $L_0$ 表面积是体积，精确地讲，$S_0(K)=nV(K)$. Brunn-Minkowski 理论的核心之一是 Brunn-Minkowski 不等式(参见文献[18-23]).

设 $K$ 和 $L$ 是 $n$ 维欧氏空间中的凸体，则

$$V(K+L)^{\frac{1}{n}}\geqslant V(K)^{\frac{1}{n}}+V(L)^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

等式成立当且仅当 $K$ 和 $L$ 位似. 就凸体的 $L_p$ 表面积，张高勇提出了如下猜想：

设 $K,L$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中含原点于内部的凸体，$0<p<1$，则

$$S_p(K+L)^{\frac{1}{n-p}}\geqslant S_p(K)^{\frac{1}{n-p}}+S_p(L)^{\frac{1}{n-p}} \tag{2}$$

当 $n=2$ 时，改记 $L_\alpha(K)=S_{1-\alpha}(K)$，称为凸体 $K$ 的 $\alpha$- 周长. 张高勇猜想的平面情形改写为如下不等式：

$$L_\alpha(K+L)^{\frac{1}{1+\alpha}}\geqslant L_\alpha(K)^{\frac{1}{1+\alpha}}+L_\alpha(L)^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{3}$$

---

① 收稿日期：2018－04－24
基金项目：国家自然科学基金项目(11601399).
作者简介：郭欢欢(1990－)，男，硕士研究生，主要从事凸体几何的研究.

其中 $0<\alpha<1$. 本文就此问题做初步的讨论，将证明如下结果：

**定理1** 若 $K$, $L$ 分别是质心在原点的正 $n$ 边形域和圆盘，则不等式(3)成立.

**证** 对平面上含原点于内部的凸体 $K$，由 $\alpha$-周长的定义可知：对任意 $t>0$，有

$$L_\alpha(tK)^{\frac{1}{1+\alpha}}=tL_\alpha(K)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

由此正齐次性，不等式(3)的等价形式是

$$L_\alpha(t_1K+t_2L)^{\frac{1}{1+\alpha}}\geqslant t_1L_\alpha(K)^{\frac{1}{1+\alpha}}+t_2L_\alpha(L)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

其中 $t_1,t_2>0$. 基于此事实，不妨假设 $K$ 是单位圆盘 $B$ 的外接正 $n$ 边形域. 并证明：

$$L_\alpha(K+\varepsilon B)^{\frac{1}{1+\alpha}}\geqslant L_\alpha(K)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\varepsilon L_\alpha(B)^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{4}$$

其中 $\varepsilon>0$.

由于 $L_\alpha$ 为旋转不变量，不妨设 $K$ 的一个顶点在 $x$ 轴上，于是 $K$ 的边上的单位外法向量角度为

$$\theta_i=\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi(i-1)}{n} \qquad i=1,\cdots,n$$

进而可知

$$h_k(\theta_i)=1 \qquad S_K=\sum_{i=1}^{n}2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\delta_{\theta_i}$$

这里 $S(K,\cdot)$ 简写为 $S_K$ 表示表面积，$\delta_{\theta_i}$ 表示集中于 $\theta_i$ 的概率点测度. 从而可以得到凸体 $K$ 的 $\alpha$-周长为

$$L_\alpha(K)=\int_{s^1}h_K(\theta_i)^\alpha\mathrm{d}S(K,\cdot)=\sum_{i=1}^{n}h_K(\theta_i)^\alpha S_K(\{\theta_i\})=$$

$$n\cdot1^\alpha\cdot2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)=2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{5}$$

可直接计算圆盘

$$L_\alpha(\varepsilon B)=\int_{s^1}h_{\varepsilon B}^\alpha\mathrm{d}S(\varepsilon B,\cdot)=\int_0^{2\pi}\varepsilon^\alpha\cdot\varepsilon\mathrm{d}\theta=2\pi\varepsilon^{1+\alpha} \tag{6}$$

接下来，计算 $K_\varepsilon=K+\varepsilon B$ 的 $\alpha$-周长 $L_\alpha(K_\varepsilon)$. 当 $-\frac{\pi}{n}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{n}$ 时，由支撑函数的定义

$$h_{K_\varepsilon}(\theta)=h_K(\theta)+h_{\varepsilon B}(\theta)=$$

$$\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)},0\right)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)+\varepsilon=\frac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}+\varepsilon$$

支撑函数 $h_{K_\varepsilon}(\theta)$ 会出现两种情况：当 $\theta=\theta_i$ 时，$h_{K_\varepsilon}(\theta)=1+\varepsilon$；当 $\theta\in\left(-\frac{(2k-1)\pi}{n},\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ 时，$h_{K_\varepsilon}(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}+\varepsilon$. 则

$$S_{K_\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\delta_{\theta_i}+\varepsilon\mathscr{H}^1$$

其中 $\mathscr{H}^1$ 是单位圆周上的弧长测度. 由于 $K$ 在关于绕原点转角 $\frac{2k\pi}{n}(k\in\mathbb{Z})$ 的旋转变换上是不变的，故

$$L_\alpha(K_\varepsilon)=\int_{s^1}h_{K_\varepsilon}^\alpha\mathrm{d}S(K_\varepsilon,\cdot)=$$

$$n\varepsilon\int_{\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]}h_{K_\varepsilon}(\theta)^\alpha\mathrm{d}S(K_\varepsilon,\cdot)=$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{K_\varepsilon}(\theta_i)^\alpha S_{K_\varepsilon}(\{\theta_i\}) + \int_{S^1\setminus\{\theta_i:\, i=1,2,\cdots,n\}} h_{K_\varepsilon}(\theta)^\alpha \mathrm{d}S(K_\varepsilon,\cdot) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{K_\varepsilon}(\theta_i)^\alpha S_{K_\varepsilon}(\{\theta_i\}) + n\int_{(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n})} h_{K_\varepsilon}(\theta)^\alpha \mathrm{d}S(K_\varepsilon,\cdot) =$$

$$n(1+\varepsilon)^\alpha \cdot 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + n\varepsilon\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \varepsilon\right)^\alpha \mathrm{d}\theta =$$

$$2n(1+\varepsilon)^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2n\varepsilon\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \varepsilon\right)^\alpha \mathrm{d}\theta \tag{7}$$

已知$\dfrac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \geqslant 1$，结合积分中值定理得到

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \varepsilon\right)^\alpha \mathrm{d}\theta \geqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)(1+\varepsilon)^\alpha \tag{8}$$

由(5)－(8) 式，并对结果等价处理，得

$$L_\alpha(K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}} - L_\alpha(K)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

$$= \left[2n(1+\varepsilon)^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2n\varepsilon\int_{0}^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \varepsilon\right)^\alpha \mathrm{d}\theta\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left(2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \geqslant$$

$$\left[2n(1+\varepsilon)^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\pi\varepsilon(1+\varepsilon)^\alpha\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left(2n\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} =$$

$$\left[2\pi(1+\varepsilon)^\alpha \frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} + 2\pi\varepsilon(1+\varepsilon)^\alpha\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left(2\pi\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{9}$$

为了完成证明，需证明

$$\left[2\pi(1+\varepsilon)^\alpha \frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} + 2\pi\varepsilon(1+\varepsilon)^\alpha\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left(2\pi\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \geqslant (2\pi)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \varepsilon \tag{10}$$

令 $u = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$，取(10) 式不等号左侧部分得到

$$f(u) = (2\pi)^{\frac{1}{1+\alpha}}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}}(u+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}} - (2\pi u)^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{11}$$

对(11) 式求导，得

$$f'(u) = \left((2\pi)^{\frac{1}{1+\alpha}}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}}(u+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\alpha}} - (2\pi u)^{\frac{1}{1+\alpha}}\right)' =$$

$$\left(\frac{(2\pi u^{-\alpha})^{\frac{1}{1+\alpha}}}{1+\alpha}\right)\left(\left(\frac{u+\varepsilon u}{u+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1\right)$$

因为 $u=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\geqslant 1$，$u\varepsilon\geqslant\varepsilon$，所以

$$f'(u)>0 \tag{12}$$

令

$$g(x)=\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \tag{13}$$

对(13)式求导，得

$$g'(x)=\tan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)<0 \tag{14}$$

由(12),(14)式可以得到复合函数 $f(g(x))$ 单调递减.

求极限

$$\lim_{n\to\infty}f\left(g\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(2\pi(1+\varepsilon)^{\alpha}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}+2\pi\varepsilon(1+\varepsilon)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}-\left(2\pi\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\right]=(2\pi)^{\frac{1}{1+\alpha}}\varepsilon$$

证毕.

本文给出了 $0<p<1$ 时平面情形下特殊凸体的证明，该结果对 $L_p$ 表面积测度的Brunn-Minkowski不等式及相关不等式的研究具有重要参考意义.

## 参考文献：


[1] FIREY W J. $p$-Means of Convex Bodies [J]. Mathematica Scandinavica, 1962, 10: 17.

[2] PETTY C M. Geominimal Surface Area [J]. Geometriae Dedicata, 1974, 3(1): 77-97.

[3] OSSERMAN R. The Isoperimetric Inequality [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1978, 84(6): 1182-1239.

[4] BONNESEN T, FENCHEL W. Theory of Convex Bodies [M]. New York: BCS Associates, 1987.

[5] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey Theory. I. Mixed Volumes and the Minkowski Problem [J]. Journal of Differential Geometry, 1993, 38(1): 131-150.

[6] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey Theory II [J]. Advances in Mathematics, 1996, 118(2): 244-294.

[7] THOMPSON A C. Minkowski Geometry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[8] CHAVEL I. Isoperimetric Inequalities (Constant Curvature) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[9] GARDNER R J. The Brunn-Minkowski Inequality [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2002, 39(3): 355-406.

[10] SANTALÓ L A, KAC M. Integral Geometry and Geometric Probability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[11] BOROCZKY K J, TRINH H. The Planar $L_p$-Minkowski Problem for $0<p<1$ [J]. Analysis of PDEs, 2016, 22: 1610.

[12] GARDNER R J. Geometric Tomography [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[13] GRUBER P M. Convex and Discrete Geometry [M]. Berlin: Springer, 2007.

[14] SCHNEIDER R. Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[15] BÖRÖCZKY K, LUTWAK E, YANG D, et al. The Log-Brunn-Minkowski Inequality [J]. Advances in Mathematics,

2012，231(3-4)：1974-1997.

[16] BÖRÖCZKY K，LUTWAK E，YANG D，et al. The Logarithmic Minkowski Problem [J]. Journal of the American Mathematical Society，2013，26(3)：831-852.

[17] BÖRÖCZKY K，LUTWAK E，YANG D，et al. Affine Images of Isotropic Measures [J]. Journal of Differential Geometry，2015，99(3)：407-442.

[18] BUSEMANN H，PETTY C M. Problems on Convex Bodies [J]. Mathematica Scandinavica，1956，4(4)：88-94.

[19] BLASCHKE W. Reden und Reisen Eines Geometers [M]. Berlin：East，1957.

[20] BUSEMANN H. Convex Surfaces [M]. New York：Interscience，1958.

[21] ZHU G X. The $L_p$ Minkowski Problem for Polytopes for $0<p<1$ [J]. Metric Geometry，2015，269(4)：1070-1094.

[22] 杨　林，罗　森，王贺军. $L_p$ 对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39 (10)：79-83.

[23] 夏落燕，方牛发. 一个加强的平面 Minkowski 混合面积不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(6)：27-30.

# The $\alpha$-Length of Planar Convex Bodies and Isoperimetric Inequalities

GUO Huan-huan[1]， LI De-yi[1,2]， ZOU Du[1]

1. College of Science，Wuhan University of Science and Technology，Wuhan 430081，China；

2. Master Studio of Hubei Province，Wuhan University of Science and Technology，Wuhan 430081，China

**Abstract**：The Brunn-Minkowski inequality is an important research content of convex geometry analysis. At present，the Brunn-minkowski inequality about volume and other geometric quantities is widely known and plays an important role in various branches of mathematics. Brunn-Minkowski inequality of convex body surface area as a special case of Aleksandrov-Fenchel inequality has also been confirmed. But in $L_p$ Brunn-Minkowski theory，the Brunn-minkowski inequality of $L_p$ surface area measurement is still an important open problem. There is no effective method to prove the related conjecture for $0<p<1$ and $p>1$. In this paper，based on the addition of Minkowski，the monotone bounded theorem and integral mean value theorem are used to study the $\alpha$-perimeter of convex body in the plane. The Brunn-Minkowski type inequality about $\alpha$-perimeter is put forward and proved when two convex bodies are a regular n polygon and a unit disc，respectively.

**Key words**：convex body；$\alpha$-perimeter；Brunn-Minkowski inequality

责任编辑　廖　坤