

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.11.007

Merton 跳扩散期权模型的有限体积格式^①

甘小艇, 徐登国

楚雄师范学院 数学与统计学院, 云南 楚雄 675000

摘要: 考虑有限体积分定价欧式的 Merton 型跳扩散期权模型. 基于线性有限元空间, 构造了向后 Euler 和 Crank-Nicolson 两种全离散有限体积格式, 且离散矩阵均为 M -矩阵. 针对方程中的积分项, 采用一类高效的线性插值技术进行逼近. 数值实验验证了本文方法的有效性和稳健性.

关键词: Merton 跳扩散期权; 有限体积法; 全离散格式; 数值实验

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2019)11-0047-07

随着金融市场的不断发展, 期权作为一种能够很好规避风险的金融衍生产品正越来越受到广大投资者的欢迎, 而期权定价问题已成为金融数学领域中一个非常热门的研究课题^[1]. 在众多的期权定价问题中, 跳扩散期权模型是较具有生命力的一种. 大量的金融实证分析均表明, 此类期权可以较好解决波动率微笑的存在问题, 这主要归因于它们所隐含的波动率曲线与市场中观察到的波动率微笑十分接近^[2-3].

近年来, 人们针对跳扩散期权模型的定价开展了广泛而深入的研究, 并获得了十分丰富的成果^[4-8]. 特别地, 文献[9-11]讨论了拟合有限体积法(Fitted Finite Volume Method)结合罚函数法定价跳扩散美式期权模型, 并给出了详细的收敛性分析, 拟合有限体积方法的应用和研究进展可参阅文献[12-17].

本文进一步考虑 Merton 跳扩散期权模型的有限体积法. 基于线性有限元空间, 我们构造了该定价模型的两种全离散有限体积格式. 通过借助文献[7]中高效的线性插值技术, 给出了模型中积分项的数值逼近. 最后, 分别以看涨期权和数字看跌期权作为数值实验, 验证了本文方法的有效性和稳健性.

1 问题描述

假设标的资产价格 x 满足如下随机微分方程

$$\frac{dx(t)}{x(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{j=1}^{N(t)} V_j\right) \quad (1)$$

其中: μ 和 σ 分别为资产价格没有发生跳跃时的期望收益率和波动率, $W(t)$ 为标准的布朗运动, $N(t)$ 为强度为 λ 的泊松过程, $\{V_j\}$ 是一系列独立同分布的随机变量的集合, 并且在 Merton 模型下, 随机变量服从对数正态分布

$$f(y) = \frac{1}{y\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\delta^2}\right) \quad (2)$$

式中 δ 表示方差的回报.

Merton 模型下的欧式期权价值 v 满足如下偏微分积分方程(partial integro-differential equation, PIDE):

$$v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (r - \lambda\zeta)xv_x + (r + \lambda)v - \lambda \int_0^\infty v(xy)f(y)dy = 0 \quad (3)$$

① 收稿日期: 2017-11-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(61463002); 楚雄师范学院校级学术骨干资助项目(XJGG1601).

作者简介: 甘小艇(1983-), 男, 博士, 副教授, 主要从事金融计算和偏微分方程数值解法的研究.

其中: $(\tau, x) \in (0, T] \times [0, \infty)$, $\tau = T - t$, t 为当前时间, T 为到期日, r 为无风险利率, 期望 $\zeta = E(y - 1) = \exp\left(\mu + \frac{\delta^2}{2}\right) - 1$.

不失一般性, 我们考察欧式看涨期权. 其边界条件满足

$$v(\tau, 0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} [v(\tau, x) - (x - K \exp(-r\tau))] = 0, \tau \in (0, T] \quad (4)$$

收益函数满足

$$v(0, x) = g(x) = \max\{x - K, 0\} \quad (5)$$

其中 K 为敲定价格.

为数值离散方便, 将方程(3)简化为如下变系数的抛物型方程:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + q(x) \frac{\partial v}{\partial x} + cv - \lambda \left(\int_0^\infty v(xy) f(y) dy \right) = 0 \quad (6)$$

其中

$$p(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2, q(x) = (\sigma^2 - r + \lambda \zeta)x, c = r + \lambda$$

且满足相应的边界条件和初值条件. 本文仅考虑欧式看涨期权的有限体积离散, 看跌期权的处理相似.

2 有限体积格式

期权定价问题通常定义在区域 $[0, \infty) \times [0, T]$ 上, 为此, 先把原问题限制在一个截断的区域 $[0, X] \times [0, T]$ 上, 其中 X 要取得足够大.

2.1 积分项逼近

本小节主要采用文献[7]中的线性插值技术对 Merton 模型中的积分项

$$-\lambda \int_0^\infty v(xy) f(y) dy$$

进行逼近, 并将离散后所得的稠密矩阵记为 \mathbf{B} .

为简单记, 不妨对 $E = [0, X]$ 作如下均匀的网格剖分 T_h :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_M = X$$

其中: 空间步长 $h = x_i - x_{i-1} = \frac{X}{M}$, $E_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, M$.

令 $y = \frac{z}{x}$, 则有

$$Q = \int_0^\infty \frac{v(z) f\left(\frac{z}{x}\right)}{x} dz \quad (7)$$

特别地, 在网格点 $x_i (i = 1, \dots, M-1)$ 处, 有

$$Q_i = \int_0^{x_{M-1}} \frac{v(z) f\left(\frac{z}{x_i}\right)}{x_i} dz = \sum_{j=0}^{M-1} Q_{i,j} \quad (8)$$

其中

$$Q_{i,j} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{v(z) f\left(\frac{z}{x_i}\right)}{x_i} dz$$

在单元网格点上, 对未知函数 v 作线性插值得

$$Q_i \approx A_i = \sum_{j=0}^{M-1} A_{i,j} \quad (9)$$

其中

$$A_{i,j} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - z}{h} v(x_j) + \frac{z - x_j}{h} v(x_{j+1}) \right) \frac{f\left(\frac{z}{x_i}\right)}{x_i} dz \quad (10)$$

将 Merton 跳扩散模型中的分布函数 $f(y)$ 代入(10)式, 得

$$A_{i,j} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - z}{h} v(x_j) + \frac{z - x_j}{h} v(x_{j+1}) \right) \exp\left(-\frac{(\log\left(\frac{z}{x_i}\right) - \mu)^2}{2\delta^2}\right) \frac{1}{z} dz \quad (11)$$

对(11)式求积分, 可得

$$A_{i,j} = \frac{1}{2h} \left[\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \log\left(\frac{x_{j+1}}{x_i}\right)}{\delta\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \log\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\delta\sqrt{2}}\right) \right) \alpha_j + \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \delta^2 - \log\left(\frac{x_{j+1}}{x_i}\right)}{\delta\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \delta^2 - \log\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\delta\sqrt{2}}\right) \right) x_i \beta_j \right] \quad (12)$$

其中 $\operatorname{erf}(\cdot)$ 表示误差函数, 且

$$\alpha_j = v(x_{j+1})x_j - v(x_j)x_{j+1}, \beta_j = (v(x_j) - v(x_{j+1})) \exp\left(\mu + \frac{\delta^2}{2}\right) \quad (13)$$

2.2 有限体积格式

对原始剖分作对偶剖分 T_h^* :

$$0 = x_0 < x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{M-\frac{1}{2}} < x_M = X$$

并记 $E_0^* = [x_0, x_{\frac{1}{2}}]$, $E_i^* = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ($i=1, \dots, M-1$), $E_M^* = [x_{M-\frac{1}{2}}, x_M]$.

取试探函数空间 U_h 为相应于 T_h 的线性有限元空间, 即满足:

- 1) $v_h \in C([0, X])$, $v_h(0) = 0$;
- 2) v_h 在每个 E_i 上是线性函数, 它完全由单元的两端点的值唯一确定.

取检验函数空间 V_h 为相应于 T_h^* 的分片常数函数(阶梯函数)空间, 即满足如下条件的函数 v_h^* 的集合:

- 1) $v_h^*(x) = 0$, $x \in E_0^*$;
- 2) v_h^* 在每个 E_i^* 上是常数.

采用上面定义的 U_h 和 V_h , 则方程(6)的半离散有限体积格式为: 求 $v_h \in U_h$, 使得

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, v_h^* \right) + a_h(v_h, v_h^*) = 0 & \forall v_h^* \in V_h, 0 < \tau \leq T \\ v(0, x) = g(x) & x \in [0, X] \end{cases} \quad (14)$$

或者等价地

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, \phi_i \right) + a_h(v_h, \phi_i) = 0 & i = 1, \dots, M \\ v(0, x) = g(x) & x \in [0, X] \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\{\phi_i\}$ 为检验函数空间 V_h 的基函数, 且有

$$a_h(v_h, \phi_i) = p_{i-\frac{1}{2}} v_h'(x_{i-\frac{1}{2}}) - p_{i+\frac{1}{2}} v_h'(x_{i+\frac{1}{2}}) + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) \frac{\partial v_h}{\partial x} dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} c v_h dx - \lambda \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q dx \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (16)$$

经有限体积离散及边界处理, 半离散格式(14), (15)式相应的矩阵形式为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \mathbf{D} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (17)$$

其中: $\mathbf{D}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$, \mathbf{B} 为积分部分离散所得稠密矩阵, \mathbf{C} 为非积分部分对应的三对角阵, \mathbf{f} 为边界处理后得到的右端项.

接下来考虑全离散格式的构造. 对 $[0, T]$ 作均匀网格剖分 $0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_N=T$, 时间网格步长为 $\Delta\tau=\frac{T}{N}$. 则求解方程(14)的全离散有限体积格式为: 求 $v_h^j(j=1, \dots, N) \in U_h$, 使得

$$(\partial_\tau v_h^j, v_h^*) + a_h(v_h^{j,\theta}, v_h^*) = 0 \quad \forall v_h^* \in V_h \quad (18)$$

其中: $\partial_\tau v_h^j = \frac{v_h^j - v_h^{j-1}}{\Delta\tau}$, $v_h^{j,\theta} = \theta v_h^j + (1-\theta)v_h^{j-1}$. 当 $\theta=1$ 时, 格式变为向后欧拉(backward Euler, BE)

格式; 当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时, 格式变为 Crank-Nicolson(CN) 格式.

为此, 可将(18)式写成如下的矩阵形式:

$$(\mathbf{I} + \Delta\tau\theta\mathbf{D})\mathbf{v}^{(j)} = (\mathbf{I} - \Delta\tau(1-\theta)\mathbf{D})\mathbf{v}^{(j-1)} + \Delta\tau\mathbf{f} \quad (19)$$

其中: $j=1, \dots, N$ ($\theta=1$ 或 $\frac{1}{2}$), \mathbf{I} 为单位向量, \mathbf{v} 为未知的向量.

关于有限体积离散系统(19), 由文献[16]中讨论的美式期权定价可知, 在一定的模型参数假设下有以下结论成立.

定理 1 令 \mathbf{D} 和 $\mathbf{I} + \Delta\tau\theta\mathbf{D}$ 分别是有限体积法离散 Merton 期权模型(3)得到的半离散和全离散矩阵. 假设模型参数满足:

$$r > 0, \lambda > 0, \frac{1}{2}\sigma^2 + r > \lambda\zeta, -\frac{5}{2}\sigma^2 + r < \lambda\zeta \quad (20)$$

则矩阵 \mathbf{D} 和 $\mathbf{I} + \Delta\tau\theta\mathbf{D}$ 均为 \mathbf{M} 矩阵.

由定理 1 可知, 有限体积离散系统(19) 满足离散的极大值原理和离散的单调性.

3 数值实验

下面利用数值实验验证本文方法求解欧式 Merton 跳扩散期权的有效性.

例 1 欧式看涨期权

欧式看涨期权模型的参数取为:

$$r=0.05, \sigma=0.15, \mu=-0.9, \delta=0.45, \lambda=0.10, K=100, T=0.25, X=300 \quad (21)$$

这里的模型参数与文献[5, 8, 16]中的取值相同. 注意, 模型参数(21) 满足参数假设(20), 因此本文中的有限体积离散矩阵均为 \mathbf{M} 矩阵.

首先在表 1 中采用有限体积格式计算出了欧式看涨期权在不同节点处的期权值, 其中 m 和 n 分别表示资产方向和时间方向网格的剖分数. 由表 1 不难看出, 当网格加密时, 两种有限体积格式计算所得的数值解均收敛到精确解, 这说明了本文的格式是收敛的.

表 1 采用两种有限体积格式求解欧式看涨期权所得的部分数值解

(m, n)	BE 格式			CN 格式		
	$v(0, 90)$	$v(0, 100)$	$v(0, 110)$	$v(0, 90)$	$v(0, 100)$	$v(0, 110)$
(300, 200)	0.529 25	4.382 84	12.641 67	0.527 27	4.384 67	12.642 01
(600, 400)	0.528 48	4.388 71	12.642 86	0.527 33	4.389 70	12.643 01
(1 200, 800)	0.527 18	4.390 59	12.643 13	0.527 44	4.390 88	12.643 26
(2 400, 1 600)	0.527 50	4.391 02	12.643 20	0.527 53	4.391 14	12.643 33
(4 800, 3 200)	0.527 54	4.391 09	12.643 24	0.527 58	4.391 19	12.643 35
文献[5]	0.527 64	4.391 25	12.643 41	0.527 64	4.391 25	12.643 41

其次, 我们采用 CN 格式求解, 在图 1 中给出了欧式看涨期权的期权曲面图, 以及 $\tau=T$ 时刻的期权值、Delta 值和 Gamma 值. 从图 1 不难看出, 本文方法求解欧式看涨期权所得的数值解的性态比较优良, 没有振荡现象发生, 这表明本文数值方法是稳健的.

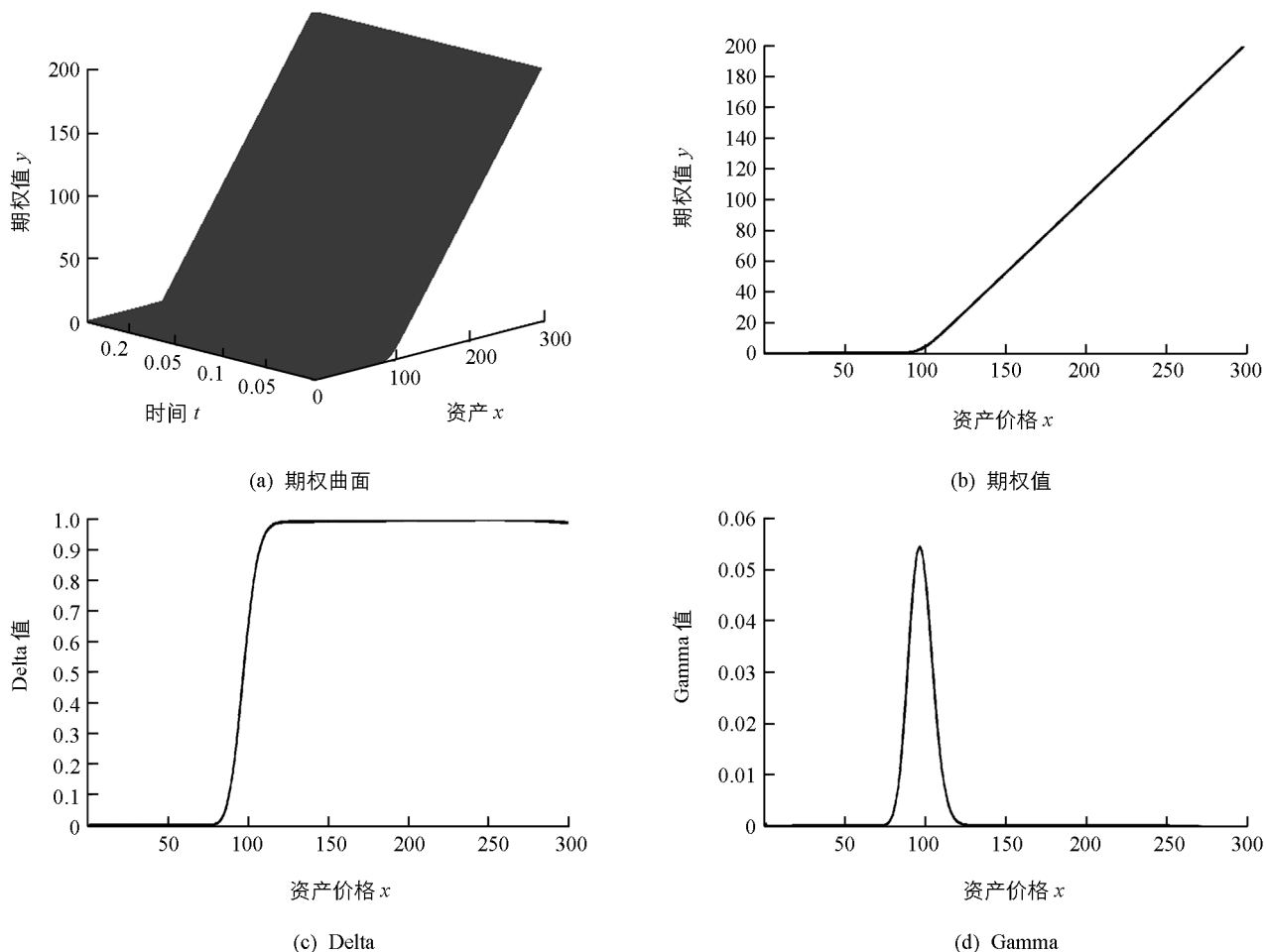


图 1 网格剖分为 $(m, n) = (4\ 800, 3\ 200)$ 时欧式看涨期权数值图像

例 2 数字看跌期权

数字看跌期权具有非连续的收益函数:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < K \\ 0 & x \geq K \end{cases}$$

模型参数的选取与(21)式相同.

首先,我们在表 2 中采用有限体积格式计算出了数字看跌期权在不同节点处的部分期权值. 由表 2 不难看出,两种格式计算所得的数值解均随着网格加密收敛到精确解,这说明了本文的格式是收敛的.

表 2 两种有限体积格式求解数字看跌期权所得的数值解

(m, n)	BE 格式			CN 格式		
	$v(0, 90)$	$v(0, 100)$	$v(0, 110)$	$v(0, 90)$	$v(0, 100)$	$v(0, 110)$
(300, 200)	0.841 01	0.362 88	0.070 53	0.840 76	0.362 85	0.070 67
(600, 400)	0.847 94	0.375 01	0.074 20	0.847 82	0.374 98	0.074 27
(1 200, 800)	0.851 42	0.381 07	0.076 05	0.851 36	0.381 06	0.076 09
(2 400, 1 600)	0.853 16	0.384 11	0.076 98	0.853 13	0.384 10	0.077 00
(4 800, 3 200)	0.854 04	0.385 63	0.077 45	0.854 02	0.385 62	0.077 46
文献[8]	0.854 90	0.387 15	0.077 92	0.854 90	0.387 15	0.077 92

采用 CN 格式求解,在图 2 中给出了数字看跌期权的期权曲面图,以及 $\tau = T$ 时刻的期权值、Delta 值和 Gamma 值. 从图 2 中不难看出,数值解的性态优良且没有振荡现象发生,这进一步说明了本文方法是稳健的.

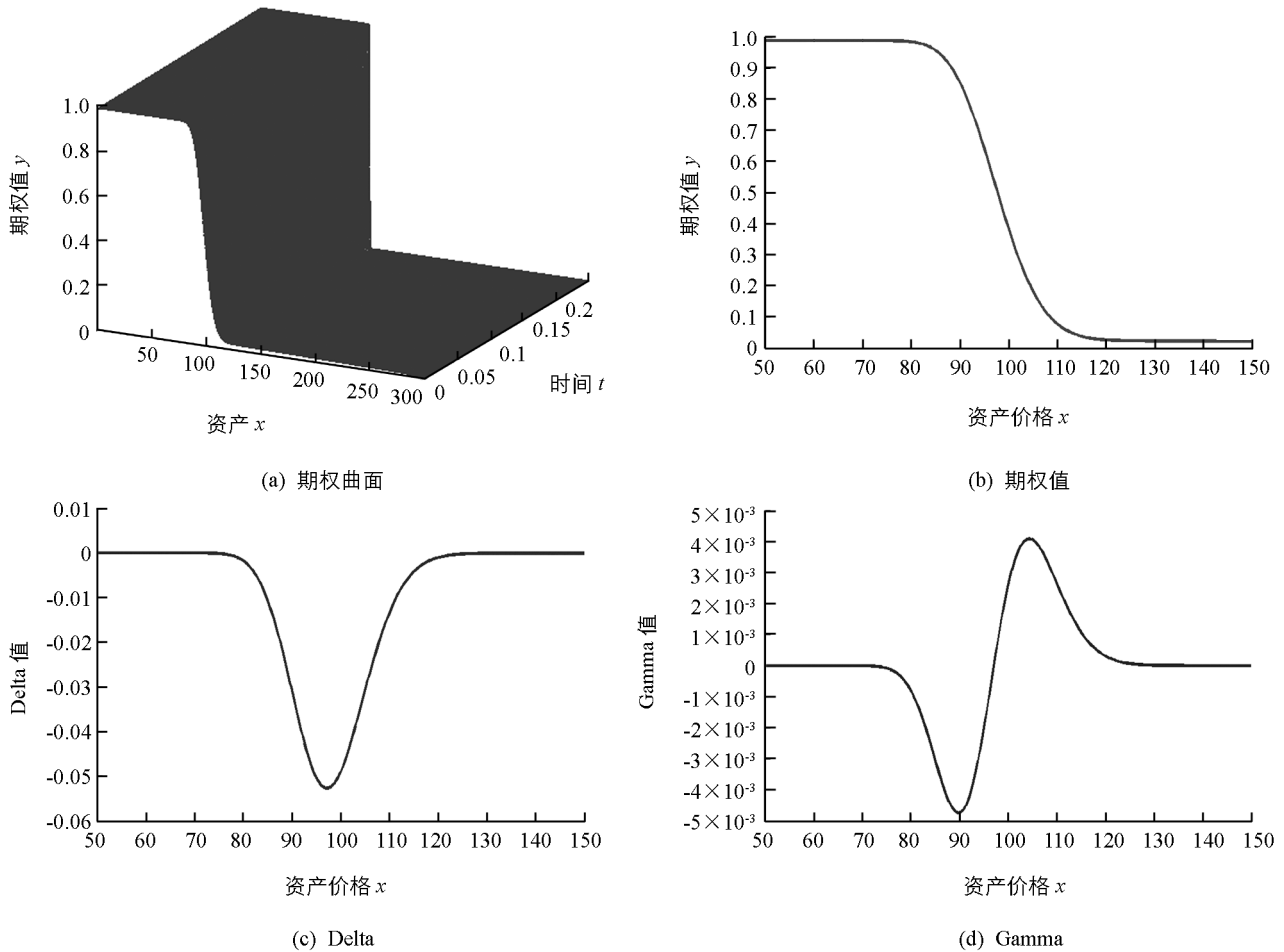


图 2 网格剖分为 $(m, n) = (4\ 800, 3\ 200)$ 时数字看跌期权数值图像

4 结 论

本文主要考虑有限体积分定价欧式的 Merton 跳扩散期权。基于线性有限元空间，我们构造了稳定的全离散有限体积格式。两个数值算例的求解结果均表明，本文所构造的格式是有效且稳健的。据我们所知，该方法不仅可以有效地求解欧式期权定价问题，同时还可以求解美式期权定价问题。因此，如何将这一高效的数值方法应用到高维的美式期权定价当中并进行格式的稳定性分析，仍需要进一步的研究。

参考文献:

- [1] 李海蓉. 美式期权定价的指数型差分格式分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(8): 86-89.
- [2] MERTON R C. Option Pricing When Underlying Stock Return Are Discontinuous [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 125-144.
- [3] KOU S G. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing [J]. Management Science, 2002, 48(8): 1086-1101.
- [4] D'HALLUIN Y, FORSYTH P A, LABAHN G. A Penalty Method for American Options with Jump Diffusion Processes [J]. NumerischeMathematik, 2004, 97(2): 321-352.
- [5] D'HALLUIN Y, FORSYTH P A, VETZAL K R. Robust Numerical Methods for Contingent Claims under Jump Diffusion Processes [J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2005, 25(1): 87-112.
- [6] TOIVANEN J. Numerical Valuation of European and American Options under Kou's Jump-Diffusion Model [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, 30(4): 1949-1970.
- [7] SALMI S, TOIVANEN J. An Iterative Method for Pricing American Options under Jump-Diffusion Model [J]. Applied Numerical Mathematics, 2011, 61(7): 821-831.
- [8] MOHAN K, KADALBAJOOLOK P T, ALPESH K. Second Order Accurate IMEX Methods for Option Pricing under

- Merton and Kou Jump-Diffusion Models [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2015, 65(3): 979-1024.
- [9] ZHANG K, WANG S. Pricing Options under Jump Diffusion Processes with Fitted Finite Volume Method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201(1): 398-413.
- [10] ZHANG K, WANG S. A Computational Scheme for Options under Jump Diffusion Processes [J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2009, 6(1): 110-123.
- [11] ZHANG K, YANG X Q, TEO K L. A Power Penalty Approach to American Option Pricing with Jump Diffusion Processes [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2008, 4(4): 783-799.
- [12] 张 凯. 美式期权定价--基于罚方法的金融计算 [M]. 经济科学出版社, 2012.
- [13] WANG S, ZHANG S H, FANG Z W. A Superconvergent Fitted Finite Volume Method for Black-Scholes Equations Governing European and American Option Valuation [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2015, 31(4): 1190-1208.
- [14] 甘小艇, 殷俊锋. 二次有限体积法定价美式期权 [J]. *计算数学*, 2015, 37(1): 67-82.
- [15] 甘小艇, 殷俊锋, 李 蕊. 有限体积法定价跳扩散期权模型 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2016, 44(9): 1458-1465.
- [16] GAN X T, YIN J F, GUO Y X. Finite Volume Method for Pricing European and American Options under Jump-Diffusion Models [J]. *East Asia Journal on Applied Mathematics*, 2017, 7(2): 227-247.
- [17] LI Y, LIN J, YANG M. Finite Volume Element Methods: An Overview on Recent Developments [J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B*, 2013, 4(1): 14-34.

Finite Volume Schemes for Pricing Merton Jump-Diffusion Option Model

GAN Xiao-ting, XU Deng-guo

School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong Yunnan 675000, China

Abstract: A finite volume method has been developed for European option pricing under the Merton jump-diffusion model. Based on a linear finite element space, both backward Euler and Crank-Nicolson full discrete finite volume schemes are constructed, and the discretization matrices are \mathbf{M} -matrices. For the approximation of the integral term, an efficient linear interpolation technique has been employed. Numerical experiments demonstrate that the methods proposed in this paper are effective and robust.

Key words: Merton jump-diffusion option; finite volume method; full discrete scheme; numerical experiment

责任编辑 张 桢