DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.11.016

分数阶中立型微分方程的振动准则①

汪皎月[1]，　项首先[2]，　于淑惠[3,4]

1. 凯里学院 数学科学学院，贵州 凯里 556600；2. 云南大学 数学与统计学院，昆明 650500；
3. 西南大学 图书馆，重庆 400715；4. 重庆大学 生命科学学院，重庆 400030

摘要：运用分析和不等式技巧，研究了一类分数阶中立型微分方程的振动性，给出了此类方程几个新的振动准则，推广和丰富了已有结果.

关　键　词：振动性；中立型；分数阶微分方程

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2014)11－0106－06

微分方程边值问题是微分方程学科的重要组成部分之一，广泛存在于自然界的数学模型当中. 自上世纪 70 年代开始，有很多关于分数阶微分方程的文章，例如分数阶微分方程的解的存在唯一性、边值问题、分数阶微分方程解的稳定性、分数阶微分方程的隐式解法与数值解法等[1-4]. 然而，关于分数阶微分方程的振动性的文章并不多[5-6].

文献[5]研究方程

$$[r(t)(D_-^{\alpha} y)^{\eta}(t)]' - q(t) f\left(\int_t^{\infty} (v-t)^{-\alpha} y(v)\mathrm{d}v\right) = 0 \qquad t > 0 \tag{1}$$

其中$(D_-^{\alpha} x)$是x的α阶 Liouville 右导数，$\alpha \in (0, 1)$，η是两个正奇数之比，通过运用 Riccati 变换技术和不等式技巧研究方程(1)的振动性，给出了几个振动的充分条件.

文献[6]研究的方程

$$D_a^q x + f_1(t, x) = v(t) + f_2(t, x), \ \lim_{t \to a^+} J_a^{1-q} x(t) = b_1 \tag{2}$$

其中D_a^q是q阶 Riemann-Liouville 微分算子，$0 < q < 1$，通过写出方程(2)的等价积分形式，根据f_1, f_2的性质来讨论方程(2)的振动性，并且把$0 < q < 1$推广到$m-1 < q \leqslant m$（m为正整数），给出了相应的结论.

受文献[6]的启发，本文主要研究下面方程的振动性

$$\begin{aligned} &(D_a^{\alpha} z(t))' + f_1(t, x) = v(t) + f_2(t, x) \\ &\lim_{t \to a^+} J_a^{1-\alpha} z(t) = b_1, \ \lim_{t \to a^+} D_a^{\alpha} z(t) = b_2 \end{aligned} \tag{3}$$

其中：$z(t) = x(t) + p(t)x(t-\tau)$，$D_a^{\alpha} x$是$x$的$\alpha$阶 Riemann-Liouville 导数，$\alpha \in (0, 1)$.

方程(3)满足条件：

---

① 收稿日期：2013－11－08
基金项目：国家自然科学基金资助项目(81102894)；贵州省专业综合改革试点建设项目(黔教高发(2012)426 号)；贵州凯里学院基础数学重点学科建设项目(KZD2009001).
作者简介：汪皎月(1972－)，女，江苏金坛人，副教授，主要从事微分方程理论及其应用研究.
通信作者：于淑惠，副研究员.

(A) $p \in C^1([a, \infty), [0, 1])$，$\tau$ 是正常数，f_1, f_2 是二元连续函数，$v \in C([a, \infty), \mathbb{R})$；$xf_i(t, x) > 0$，$(i=1,2)$，$x \neq 0$，$t \geqslant a$.

(B) $|f_1(t, x)| \geqslant g_1(t)|x|^m$，$|f_2(t, x)| \leqslant g_2(t)|x|^n$，其中 $g_1, g_2 \in C([a, \infty), \mathbb{R}^+)$，$m, n > 0$.

本文主要应用分析的方法研究了方程(3)的振动性，给出了几个定理，且在假定解存在的前提下，给予了严格证明. 在条件(A)和(B)成立时对 m, n 的取值进行讨论，给出 3 种情形的振动准则.

令

$$F(t) = v(t) + f_2(t, x) - f_1(t, x)$$

首先给出本文所涉及的基本定义和引理[7-8].

定义 1 设函数 $y: [a, \infty) \to \mathbb{R}$，$\sigma > 0$，则函数 y 的 σ 阶 Riemann-Liouville 积分为

$$J_a^\sigma y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^t (s-t)^{\sigma-1} y(s) \mathrm{d}s \qquad t > a \tag{4}$$

其中 Γ 是 gamma 函数.

定义 2 设函数 $y: [a, \infty) \to \mathbb{R}$，$\sigma > 0$，则函数 y 的 σ 阶 Riemann-Liouville 导数为

$$D_a^\sigma y(t) = \frac{\mathrm{d}^{[\sigma]}}{\mathrm{d}t^{[\sigma]}} J_a^{[\sigma]-\sigma} y(t) = \frac{1}{\Gamma([\sigma]-\sigma)} \frac{\mathrm{d}^{[\sigma]}}{\mathrm{d}t^{[\sigma]}} \int_a^t (s-t)^{[\sigma]-\sigma-1} y(s) \mathrm{d}s \qquad t > a \tag{5}$$

其中$[\sigma] = \min\{z \in \mathbb{Z}: z \geqslant \sigma\}$.

引理 1 设 A 和 B 均为正常数，则

$$A^\beta + (\beta-1)B^\beta - \beta AB^{\beta-1} \geqslant 0 \qquad \beta > 1 \tag{6}$$

$$A^\beta - (1-\beta)B^\beta - \beta AB^{\beta-1} \geqslant 0 \qquad 0 < \beta < 1 \tag{7}$$

当且仅当 $A = B$ 取“=”.

引理 2 设 $x(t)$ 是方程(3)的一个最终正解，则存在 $t_1 > a$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，满足下面的不等式：

$$x(t) < \left(\frac{|b_1|}{t-a} + \frac{|b_2|}{\alpha}\right) \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s F(\xi) \mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}s \tag{8}$$

证 由方程(3)得，

$$D_a^\alpha z(t) = \int_a^t F(s) \mathrm{d}s + b_2$$

等价于 Volterra 分数阶积分方程

$$z(t) = \frac{b_1 (t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s F(\xi) \mathrm{d}\xi + b_2\right) \mathrm{d}s$$

则

$$z(t) < \frac{|b_1| (t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |b_2| \mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s F(\xi) \mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}s = \left(\frac{|b_1|}{t-a} + \frac{|b_2|}{\alpha}\right) \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s F(\xi) \mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}s$$

$x(t)$是方程(3)的一个最终正解，即存在 $T > a$，使得当 $t \geqslant T$ 时，有 $x(t) > 0$，由 $p(t) > 0$ 得，当 $t \geqslant T + \tau$ 时，我们有 $z(t) > x(t)$，即取 $t_1 = T + \tau$，当 $t \geqslant t_1$ 时，有

$$x(t)<\left(\frac{|b_1|}{t-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}\right)\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s F(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

证毕.

接着给出一个简单的情形 $f_2=0$.

定理 1 设方程(3) 满足条件(A)，$f_2=0$，如果

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=-\infty \tag{9}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=\infty \tag{10}$$

则方程(3) 是振动的.

证 设 $x(t)$ 是方程(3) 的一个非振动解，不妨设 $x(t)$ 为最终正解，则由引理 2 得

$$\begin{aligned}x(t)<&\left(\frac{|b_1|}{t-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}\right)\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s F(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s<\\&\left(\frac{|b_1|}{t_1-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}\right)\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s |F(\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant&\left(\frac{|b_1|}{t_1-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}\right)\left(\frac{t-a}{t}\right)^\alpha+\int_a^T\left(\frac{t-a}{t}\right)^\alpha\frac{1}{t-s}\left(\int_a^s |F(\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{|b_1|}{t_1-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}+\int_a^T\frac{1}{t_1-s}\left(\int_a^s |F(\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1\end{aligned}$$

记

$$C(T)=\frac{|b_1|}{t_1-a}+\frac{|b_2|}{\alpha}+\int_a^T\frac{1}{t_1-s}\left(\int_a^s |F(\xi)|\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

则

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1$$

两边取极限，得

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+\liminf_{t\to\infty}t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

而由 $x(t)>0$ 得 $\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)>0$，故 $\liminf_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\geqslant 0$，与式(9) 矛盾.

设 $x(t)$ 为最终负解，类似可得与式(10) 矛盾. 故方程(3) 是振动的. 证毕.

最后给出在 $m>n$ 时的 3 种情形：

1) $m>1$，$n=1$；

2) $m=1$，$n<1$；

3) $m>1$，$n<1$

下方程(3) 的振动准则.

定理 2 设方程(3) 满足条件(A)，(B)，且 $m>1$，$n=1$，如果

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=-\infty \tag{11}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=\infty \tag{12}$$

其中

$$G_m(\xi)=(m-1)m^{\frac{m}{1-m}}g_1^{\frac{1}{1-m}}(\xi)g_2^{\frac{m}{m-1}}(\xi)$$

则方程(3)是振动的.

证 设 $x(t)$ 是方程(3)的一个非振动解，不妨设 $x(t)$ 为最终正解. 由引理 2 和定理 1 的证明可得，当 $m>1$，$n=1$ 时，

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+$$
$$t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (g_2(\xi)x(\xi)-g_1(\xi)x^m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_1$$

取 $\beta=m$，$A=g_1^{\frac{1}{m}}x$，$B=(\frac{g_2g_1^{-\frac{1}{m}}}{m})^{\frac{1}{m-1}}$，由(6)式可得

$$g_2(\xi)x(\xi)-g_1(\xi)x^m(\xi)\leqslant(m-1)m^{\frac{m}{1-m}}g_1^{\frac{1}{1-m}}(\xi)g_2^{\frac{m}{m-1}}(\xi)=G_m(\xi) \tag{13}$$

即

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_1$$

两边取极限得

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+\liminf_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

而由 $x(t)>0$ 得 $\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)>0$，故 $\liminf\limits_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\geqslant 0$，与式(11)矛盾.

设 $x(t)$ 为最终负解，类似可得，与式(12)矛盾. 故方程(3)是振动的. 证毕.

定理 3 设方程(3)满足条件(A),(B)，且 $m=1$，$n<1$，如果

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_n(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=-\infty \tag{14}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (v(\xi)+G_n(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=\infty \tag{15}$$

其中

$$G_n(\xi)=(n-1)n^{\frac{n}{1-n}}g_1^{\frac{n}{n-1}}(\xi)g_2^{\frac{1}{1-n}}(\xi)$$

则方程(3)是振动的.

证 设 $x(t)$ 是方程(3)的一个非振动解，不妨设 $x(t)$ 为最终正解. 由引理 2 和定理 1 的证明可得，当 $m=1$，$n<1$ 时，

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+$$
$$t^{-\alpha}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s (g_2(\xi)x^n(\xi)-g_1(\xi)x(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant t_1$$

取 $\beta=n$，$A=g_2^{\frac{1}{n}}x$，$B=\left(\frac{g_1g_2^{-\frac{1}{n}}}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，由(7)式得

$$g_2(\xi)x^n(\xi)-g_1(\xi)x(\xi)\leqslant(n-1)n^{\frac{n}{1-n}}g_1^{\frac{n}{n-1}}(\xi)g_2^{\frac{1}{1-n}}(\xi)=G_n(\xi) \tag{16}$$

即

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_n(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1$$

两边取极限，得

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+\liminf_{t\to\infty}t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_n(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

而由 $x(t)>0$ 得 $\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)>0$，故$\liminf\limits_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\geqslant 0$，与式(14) 矛盾.

若 $x(t)$ 为最终负解时，类似可得，与式(15) 矛盾. 故方程(3) 是振动的. 证毕.

定理 4　设方程(3) 满足条件(A),(B)，且 $m>1$，$n<1$，如果

$$\liminf_{t\to\infty}t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_{m,n}(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=-\infty\tag{17}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty}t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_{m,n}(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=\infty\tag{18}$$

其中

$$G_{m,n}(\xi)=(m-1)m^{\frac{m}{1-m}}g_1^{\frac{1}{1-m}}(\xi)h^{\frac{m}{m-1}}(\xi)+(n-1)n^{\frac{n}{1-n}}h^{\frac{n}{n-1}}(\xi)g_2^{\frac{1}{1-n}}(\xi)$$

这里 $h\in C([a,\infty),\mathbb{R}^+)$，则方程(3) 是振动的.

证　设 $x(t)$ 是方程(3) 的一个非振动解，不妨设 $x(t)$ 为最终正解. 由引理 2 和定理 1 的证明可得，当 $m>1$，$n<1$ 时，

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant{}& C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(g_2(\xi)x^n(\xi)-g_1(\xi)x^m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=\\&C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s v(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(g_2(\xi)x^n(\xi)-h(\xi)x(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s+\\&t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(h(\xi)x(\xi)-g_1(\xi)x^m(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1\end{aligned}$$

运用不等式(13)(取 $g_2=h$) 和不等式(16)(取 $g_1=h$)，得到

$$\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_{m,n}(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\qquad t\geqslant t_1$$

其中

$$G_{m,n}(\xi)=(m-1)m^{\frac{m}{1-m}}g_1^{\frac{1}{1-m}}(\xi)h^{\frac{m}{m-1}}(\xi)+(n-1)n^{\frac{n}{1-n}}h^{\frac{n}{n-1}}(\xi)g_2^{\frac{1}{1-n}}(\xi)$$

两边取极限，得

$$\liminf_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\leqslant C(T)+\liminf_{t\to\infty}t^{-\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\int_a^s(v(\xi)+G_{m,n}(\xi))\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

而由 $x(t)>0$ 得 $\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)>0$，故$\liminf\limits_{t\to\infty}\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}x(t)\geqslant 0$，与式(17) 矛盾.

若 $x(t)$ 为最终负解时，类似可得，与式(18) 矛盾. 故方程(3) 是振动的. 证毕.

推论 1　定理 4 中的 h 取不同的函数时，将会得到不同的振动准则.

参考文献：

[1]　ZHOU Y，JIAO F，LI J. Existance and Uniqueness For p-Type Fractional Neutral Differential Equations [J]. Nonlinear Anal，2009(71)：2724－2733.

[2] DENG W. Smoothness and Stability of the Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations [J]. Nonlinear Anal, 2010(72): 1768-1777.
[3] GALEONE L, GARRAPPA R. Explicit Methods for Fractional Differential Equations and Their Stability Properties [J]. J Comput Appl Math, 2009(228), 548-560.
[4] MUSLIM M. Existence and Approximation of Solutions to Fractional Differential Equations [J]. Math Comput Modelling, 2009(49): 1164-1172.
[5] CHEN D X. Oscillation Criterial of Fractional Differential Equations [J]. Adv Difference Equ, 2012(33): 1-18.
[6] GRACE S R, AGARWAL R P, PATRICIA J Y. On The Oscillation of Fractional Differential Equations [J]. Fract Calc Appl Anal, 2012(15): 222-231.
[7] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
[8] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M]. 2nd ed, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

Oscillation Criteria for Fractional Neutral Differential Equations

WANG Jiao-yue[1], XIANG Shou-xian[2], YU Shu-hui[3,4]

1. *School of Mathematical Sciences, Kaili University, Kaili Guizhou 556600, China;*
2. *Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650500, China;*
3. *Southwest University Library, Chongqing 400715, China;*
4. *School of Life Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China*

Abstract: Using generalized Riccati transformation and inequality technique, the oscillation of a fractional neutral differential equation is studied and some sufficient conditions for the interval oscillation criteria for the equation are given, which extends and enriches the results given in literature available.

Key words: oscillation; neutral; fractional differential equation

责任编辑 张 枸