第 36 卷第 11 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014年11月
Vol. 36　No. 11　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Nov.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.11.017

锥度量空间中一类扩张映射的公共不动点定理①

巨小维，　顾　贞，　于莉琦

黑龙江东方学院 基础部，哈尔滨 150086

摘要：在不要求映射的连续性和锥的正规性的条件下，得到了扩张映射的几个公共不动点定理，所得结果改进和推广了已知文献中重要结果.

关 键 词：锥度量空间；扩张映射；公共不动点；重合点

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)11-0112-05

1　预备知识

自 1976 年以来，有关压缩映射的公共不动点理论方面的研究已经取得了许多重要的结果，这些结果在非线性积分方程和微分方程中有着非常广泛的应用[1-6]. 相比之下，有关锥度量空间中扩张映射的不动点理论结果仍然很少. 文献[7]引进了锥度量空间并且在完备的锥度量空间中证明了 Banach 压缩映象原理成立. 随后，锥度量空间中映射的公共不动点的存在性在文献[8-12]中已被考虑. 本文的目的是在锥度量空间中讨论一类扩张型映射的公共不动点问题，证明了几个新的公共不动点定理，推广史晓棠等人在文献[8]中所得的结果.

定义 1[9]　设 E 是一个实 Banach 空间，P 是 E 中的一个子集，称 P 是一个锥，如果

(i) P 是非空闭凸集且 $P \neq \{\theta\}$，其中 θ 是 E 的零元素；

(ii) 若 $\lambda \geqslant 0$ 且 $x \in P$，则 $\lambda x \in P$；

(iii) $x \in P$ 且 $-x \in P$，则 $x = \theta$.

设 P 是 E 中的锥，由 P 所定义的半序“$\leqslant$”如下：若 $y - x \in P$，则 $x \leqslant y$. 用 $x \ll y$ 表示 $y - x \in \mathrm{int}P$（P 的内点集）. 锥 P 是正规锥，如果存在常数 $K > 0$，使得 $\theta \leqslant x \leqslant y$（$\forall x, y \in E$），蕴含 $\|x\| \leqslant K\|y\|$，其中 K 为正规常数.

定义 2[10]　X 是一个非空集，E 是 Banach 空间. 若映射 d：$X \times X \to E$ 满足

(i) $\theta \leqslant d(x, y)$，$\forall x, y \in X$. $d(x, y) = \theta$ 当且仅当 $x = y$；

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$，$\forall x, y \in X$；

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$，$\forall x, y, z \in X$.

则称 d 是 X 的一个锥度量.（X，d）称为锥度量空间.

定义 3[10]　设（X，d）称为锥度量空间，$x \in X$ 且 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 中的一个序列. 则

(i) 称 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 是一个柯西列，若对每一个 $c \in E$ 且 $c \gg \theta$，存在正整数 N 使得对所有的 n，$m > N$，

---

① 收稿日期：2014-03-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11271105).
作者简介：巨小维(1982-)，女，山东临沂人，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究.

$d(x_n, x_m) \ll c$.

(ii) 称$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$是一个收敛列，若对每一个$c \in E$且$c \gg \theta$，存在正整数N使得对所有的$n > N$，$d(x_n, x) \ll c$；其中$x \in X$，称x是$\{x_n\}_{n\geqslant 1}$的极限，记作：$x_n \to x(n \to \infty)$.

(iii) 称(X, d)为完备的锥度量空间，若X中的每一个柯西列都收敛.

定义4 设映射$f, g: X \to X$，对于$\forall x \in X$，如果$f(x) = g(x)$，那么称点x为映射f, g的重合点.

引理1[10] 锥度量空间中收敛序列的极限是唯一的.

引理2[9] 设(X, d)是锥度量空间，E是Banach空间，$P \subset E$是锥，$\mathrm{int}P \neq \varphi$，设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是$X$中的两个序列，且$x_n \to x_0$，$y_n \to y_0(n \to \infty)$. 则

$$d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)(n \to \infty)$$

引理3[11] 设(X, d)是锥度量空间，$\{x_n\}$是X中的序列. 如果存在常数$h \in (0, 1)$满足

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant hd(x_{n-1}, x_n) \qquad \forall n \geqslant 1$$

则$\{x_n\}$是X中的一个柯西列.

2 主要结果

定理1 设(X, d)是完备的锥度量空间，设映射$S, T: X \to X$满足：

$$d(Sx, Sy) \geqslant a(d(Tx, Ty))d(Tx, Ty) \qquad \forall x, y \in X \tag{1}$$

其中$a(t): E^+ \to (1, +\infty)$是连续递增的函数. 如果$S$是满射且$T$是单射(或$S$是一一映射)，则$T, S$有唯一重合点.

证 任取$x_0 \in X$，由于S是满射，故存在点$x_1, x_2 \in X$，使$Tx_0 = Sx_1$，$Tx_1 = Sx_2$，依此类推，定义$\{x_n\}$为：$Tx_n = Sx_{n+1}(n = 0, 1, 2, \cdots)$，因此不等式(1)得，

$$\begin{aligned} d(Sx_{n-1}, Sx_n) \geqslant a(d(Tx_{n-1}, Tx_n))d(Tx_{n-1}, Tx_n) = \\ a(d(Sx_n, Sx_{n+1}))d(Sx_n, Sx_{n+1}) \end{aligned} \tag{2}$$

因为$a(t) > 1$，所以序列$\{d(Sx_n, Sx_{n+1})\}$单调递减且非负，于是$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \to \xi$，且$\xi \geqslant \theta$，$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \geqslant \xi$. 又因为$a(t)$是递增函数，所以有

$$a(d(Sx_n, Sx_{n+1})) \geqslant a(\xi)$$

于是由(2)式得，

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leqslant \frac{1}{a(\xi)}d(Sx_{n-1}, Sx_n)$$

令

$$h = \frac{1}{a(\xi)} \in (0, 1)$$

由(2)式得

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leqslant hd(Sx_{n-1}, Sx_n)$$

于是由引理2得，$\{Sx_n\}$是(X, d)中的Cauchy列. 由X的完备性知，存在$q \in X$，使$Sx_n \to q(n \to \infty)$，由于S是满射，所以存在$p \in X$，使得$Sp = q$.

由不等式(1)，得

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Sp) = d(Sx_{n+1}, Sp) \geqslant a(d(Tx_{n+1}, Tp))d(Tx_{n+1}, Tp) = \\ a(d(Tx_{n+1}, Tp))d(Sx_{n+2}, Tp) \end{aligned}$$

所以，令$n \to \infty$，有

$$\theta = d(q, q) \geqslant a(d(Tx_{n+1}, Tp))d(q, Tp)$$

故

$$d(q, Tp)=\theta$$

即

$$Tp=q=Sp$$

假设存在另一点 $u \in X$，使得 $Su=Tu$. 由不等式(1) 得

$$d(Tu, Tp)=d(Su, Sp) \geqslant a(d(Tu, Tp))d(Tu, Tp)$$

由于 $a(t)>1$，易得

$$d(Tu, Tp)=\theta$$

即 $Tu=Tp$，又因为 T 是单射，所以有 $u=p$.

于是证得 T,S 有唯一重合点.

注 1　在定理 1 中，若 T,S 为弱相容映像，则得到 T,S 有唯一的公共不动点.

在定理 1 中，如果 $T=I_X$ 是 X 上的恒等映射，可得以下结论.

推论 1　设(X, d)是完备的锥度量空间，设映射 $S: X \to X$ 是满射且满足：

$$d(Sx, Sy) \geqslant a(d(x, y))d(x, y) \qquad \forall x, y \in X \tag{2}$$

其中 $a(t): E^+ \to (1, +\infty)$ 是连续递增的函数，则 S 有唯一不动点.

定理 2　设(X, d)是完备的锥度量空间，设映射 $S, T: X \to X$ 满足：

$$d(Sx, Sy) \geqslant a(d(Tx, Ty))d(Tx, Ty)+b(d(Tx, Ty))d(Sx, Tx)+ \\ c(d(Tx, Ty))d(Sy, Ty) \qquad \forall x, y \in X \tag{3}$$

如果 S 是满射且 T 是单射(或 S 是一一映射)，$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$: $E^+ \to [0, +\infty)$ 是连续递增的函数，并且 $a(t)+b(t)+c(t)>1$，$0 \leqslant b(t)<1$，则 T,S 有唯一重合点.

证　任取 $x_0 \in X$，由于 S 是满射，故存在点 $x_1, x_2 \in X$，使 $Tx_0=Sx_1$，$Tx_1=Sx_2$，依此类推，定义$\{x_n\}$为：$Tx_n=Sx_{n+1}(n=0, 1, 2, \cdots)$，因此由不等式(3) 得，

$$d(Sx_{n-1}, Sx_n) \geqslant a(t)d(Tx_{n-1}, Tx_n)+b(t)d(Sx_{n-1}, Tx_{n-1})+c(t)d(Sx_n, Tx_n) \geqslant \\ a(t)d(Sx_n, Sx_{n+1})+b(t)d(Sx_{n-1}, Sx_n)+c(t)d(Sx_n, Sx_{n+1})$$

这里定义

$$a(t)=a(d(Tx_{n-1}, Tx_n)),\ b(t)=b(d(Tx_{n-1}, Tx_n)),\ c(t)=c(d(Tx_{n-1}, Tx_n))$$

于是有

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leqslant \frac{1-b(t)}{a(d(t)+c(d(t))}d(Sx_{n-1}, Sx_n) \tag{4}$$

因为

$$0 \leqslant b(t)<1$$

且

$$a(t)+b(t)+c(t)>1$$

所以

$$0<\frac{1-b(d(Tx_{n-1}, Tx_n))}{a(d(Tx_{n-1}, Tx_n))+c(d(Tx_{n-1}, Tx_n))}<1$$

令

$$h(t)=\frac{1-b(t)}{a(t)+c(t)} \in (0, 1)$$

由(4) 式得

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leqslant h(t)d(Sx_{n-1}, Sx_n) \tag{5}$$

所以序列$\{d(Sx_n, Sx_{n+1})\}$单调递减且非负，于是 $d(Sx_n, Sx_{n+1}) \to \xi$，$\xi \in X$ 且 $\xi \geqslant \theta$. 下面证明 $\xi=\theta$. 否则令 $\xi>\theta$，因为 $d(Sx_n, Sx_{n+1}) \geqslant \xi$，所以有

$$h(d(Sx_n, Sx_{n+1})) \leqslant h(\xi)<1 \qquad n=1,2,\cdots$$

因此

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leqslant h(\xi)d(Sx_{n-1}, Sx_n) \leqslant \cdots \leqslant h^{n-1}(\xi)d(Sx_1, Sx_2) \to \theta \qquad n \to \infty$$

所以 $\xi=\theta$.

由引理2可得，$\{Sx_n\}$ 是 (X, d) 中的 Cauchy 列. 由 X 的完备性知，存在 $q \in X$，使得 $Sx_n \to q(n \to \infty)$，由于 S 是满射，所以存在 $p \in X$，使得 $Sp=q$.

使用不等式(3)，得

$$d(Tx_n, Sp)=d(Sx_{n+1}, Sp) \geqslant a(t)d(Tx_{n+1}, Tp)+b(t)d(Sx_{n+1}, Tx_{n+1})+c(t)d(Sp, Tp)=$$
$$a(t)d(Sx_{n+2}, Tp)+b(t)d(Sx_{n+1}, Sx_{n+2})+c(t)d(Sp, Tp)$$

所以，令 $n \to \infty$，有

$$\theta=d(q, q)=d(q, Sp) \geqslant a(t)d(q, Tp)+b(t)d(q, q)+c(t)d(q, Tp)=$$
$$[a(t)+c(t)]d(q, Tp)$$

因为

$$a(t)+c(t) \neq 0$$

所以

$$d(q, Tp)=\theta$$

即

$$Tp=q=Sp$$

假设存在另一点 $u \in X$，使得 $Su=Tu$. 由不等式(3)得

$$d(Tu, Tp)=d(Su, Sp) \geqslant a(t)d(Tu, Tp)+b(t)d(Su, Tu)+c(t)d(Sp, Tp)=a(t)d(Tu, Tp)$$

由于 $a(t)>1$，易得 $d(Tu, Tp)=\theta$，即 $Tu=Tp$，又因为 T 是单射，所以有 $u=p$.

于是证得 T, S 有唯一重合点.

注2 在定理2中，若 T, S 为弱相容映象，则得 T, S 有唯一公共不动点.

在定理12，如果 $T=I_X$，可得一下结论.

推论2 设 (X, d) 是完备的锥度量空间，设映射 $S: X \to X$ 是满射且满足：

$$d(Sx, Sy) \geqslant a(d(x, y))d(x, y)+$$
$$b(d(x, y))d(x, Sx)+c(d(x, y))d(y, Sy) \qquad \forall x, y \in X$$

其中 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$：$E^+ \to [0, +\infty)$ 是连续递增的函数，并且 $a(t)+b(t)+c(t)>1$，则 T, S 有唯一公共不动点.

注3 本文在锥度量空间中又证明了一类扩张映象的不动点定理，该结果扩展了文献[8]的相关结果. 由于本文中的定理和推论不要求锥的正规性，也不要求映射的连续性，从而扩大了定理的应用范围. 另外在本文中令 $E=R$，$P=[0, +\infty)$，可得到度量空间中许多相应的有意义的公共不动点理论，推广了文献[13]的有关结果.

参考文献：

[1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Coupled Fixed Point of Nonlinear Operators with Applications [J]. Nonlinear Anal, 1987, 11(5): 623－632.

[2] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cone [M]. New York: Academic Press, 1988.

[3] SUN Yong. A Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Operators with Applications [J]. J Math Anal Appl, 1991, 156: 240－246.

[4] GUO Da-jun. Existence and Uniqueness of Positive Fixed Point for Mixed Monotone Operators and Applications [J]. Appl Anal, 1992, 46: 91－100.

[5] RHOADES B E. Some Theorems on Weakly Contractive Mappings [J]. Nonlinear Anal, 2001, 47: 2683－2693.

[6] 尹建东，邓中书. 几个非线性算子不动点的存在性定理及其应用 [J]. 南昌大学学报：理科版，2009，33(6)：518－522.

[7] HUANG Long-guang，ZHANG Xian. Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings [J]. J Math Anal Appli，2007，332：1468－1476.

[8] 史晓棠，谷　峰. 锥度量空间中映象的一个新的公共不动点定理 [J]. 杭州师范大学学报：自然科学版，2012，11(2)：162－168.

[9] 史晓棠，谷　峰. 锥度量空间中扩张映射的一个新的不动点定理 [J]. 杭州师范大学学报：自然科学版，2012，28(3)：351－356.

[10] 韩　艳，许绍元. 锥度量空间中扩张映射的公共不动点定理 [J]. 应用泛函分析学报，2013，15(2)：142－146.

[11] YUAN Qing，QIN Xiao-long. Fixed Point theorems for Generalized Contractions in Cone Metric Spaces [J]. International Journal of Modern Mathematics，2009，4(3)：269－275.

[12] ZHANG Xian. Common Fixed Point theorem of Lipschitz Type Mappings in Cone Metric Space [J]. Mathematics，2010，53(6)：1319－1148.

[13] 张石生. 不动点理论及应用 [M]. 重庆：重庆出版社，1984.

A Class of Common Fixed Point Theorems for Expanding Mappings in Cone Metric Spaces

JU Xiao-wei，　GU　Zhen，　YU Li-qi

Department of Basic Courses，Heilongjiang Eastern College，Harbin Heilongjiang 150086，China

Abstract：In this paper，a few common fixed point theorems for expanding mappings are obtained without appealing to the continuity of the mappings in a non-normal cone metric space. The results generalize and improve some well-known comparable results in literature available.

Key words：cone metric space；expanding mapping；common fixed point；coincidence point

责任编辑　潘春燕