

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.11.018

原子的初态和耦合强度对量子系统纠缠度的影响^①

邹世乾¹, 沈真², 邓华军¹, 周士芸¹

1. 安顺学院 数理学院, 贵州 安顺 56100; 2. 西南大学 物理科学与技术学院, 重庆 400715

摘要: 在两耦合二能级原子与单模光场相互作用系统中, 利用部分转置矩阵负本征值方法, 研究了原子初态及耦合强度对原子间纠缠度的影响. 结果表明: 两原子间纠缠呈现周期性振荡, 随着原子初态 θ 增大, 原子间纠缠时间变长, 纠缠振幅也变大; 随着两原子间的耦合强度增大, 原子间纠缠的周期变大, 次波变少.

关键词: 纠缠特性; 部分转置矩阵本征值; 原子初态; 原子耦合强度

中图分类号: O431 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2014)11-0117-05

量子纠缠体现了量子信息中粒子与粒子、粒子与场之间作用的本质, 是实现量子信息传递的重要载体, 量子纠缠度的研究一直倍受关注, 人们为此提出了多种描述纠缠度的物理量, 如 Shannon 熵^[1]、纠缠相对熵^[2]、密度算符之间的距离^[3]、任意纠缠度^[4]和共生纠缠度^[5]等. 人们还利用纠缠度理论计算方法, 对原子与光场相互作用系统的理论模型进行研究, 得到了一些有意义的结果^[6-10]. 其中, 文献[11]研究了 T-C 模型中三体态纠缠系统的纠缠演化特性; 文献[12]研究了单模辐射场与耦合双原子相互作用的五体态纠缠系统中的场熵压缩特性, 但没有考虑原子初态及耦合强度对原子间纠缠度的影响. 本文利用部分转置矩阵负本征值判断纠缠度的方法, 结合 Matlab 程序软件作出的图形, 研究了在原子与光场相互作用的五体态纠缠系统中, 原子初态及耦合强度对纠缠度的影响. 希望本文的研究结果对量子态的控制和量子器件的制备能够具有一定的理论指导意义.

1 理论模型

在两耦合的二能级原子与单模光场相互作用系统中, 考虑原子间偶极-偶极相互作用, 系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \omega a^\dagger a + \omega_0 \sum_{i=1}^2 s_i + g \sum_{i=1}^2 (a^\dagger s_i^- + a s_i^+) + \lambda \sum_{i \neq j=1,2} s_i^- s_j^+ \quad (1)$$

式中: $a^\dagger$ 和 a 分别为光场的产生和湮灭算符, ω_0 为两原子的跃迁频率, ω 为场频率, g 为原子与场的耦合系数, λ 为原子间耦合强度系数. 在 $t=0$ 时, 考虑两个原子处于激发态 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 和基态 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 的相干叠加态, 场处于真空态 $|0\rangle$, 系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\uparrow 0\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\downarrow 1\rangle \quad (2)$$

代入薛定谔方程 $H\Psi = E\Psi$ 得

① 收稿日期: 2014-04-25
基金项目: 贵州科技厅、安顺市人民政府、安顺学院联合基金项目(黔科合 J 字 LKA[2012]02 号); 贵州省教育厅重点课题(黔教合 KY 字[2012]025 号).
作者简介: 邹世乾(1969-), 男, 山东临沂人, 副教授, 主要从事量子信息论的研究.

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\uparrow 0\rangle - \sin \frac{\theta}{2} [c_1(t) |\downarrow\downarrow 0\rangle + \\ & c_2(t) |\uparrow\downarrow 1\rangle + c_3(t) |\downarrow\uparrow 1\rangle + c_4(t) |\uparrow\uparrow 2\rangle] \end{aligned} \quad (3)$$

其中系数为

$$c_1(t) = \frac{2g^2\alpha + 2\lambda}{3\lambda} \quad (4)$$

$$c_2(t) = c_3(t) = \frac{-\beta}{6g(m-n)} \quad (5)$$

$$c_4(t) = \frac{2\sqrt{2}g^2\alpha - \sqrt{2\lambda}}{3\lambda} \quad (6)$$

系数中的参数取值为

$$\alpha = m \cos \frac{t}{m} - n \cos \frac{t}{n} + i \left(m \sin \frac{t}{m} - n \sin \frac{t}{n} \right) \quad (7)$$

$$\beta = \cos \frac{t}{m} - \cos \frac{t}{n} + i \left(\sin \frac{t}{m} - \sin \frac{t}{n} \right) \quad (8)$$

$$m = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 24g^2}}{12g^2} \quad (9)$$

$$n = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 24g^2}}{12g^2} \quad (10)$$

2 数值计算及讨论

根据 Peres 提出的利用密度算符的部分转置矩阵负本征值来计算纠缠度理论, 密度算符的部分转置矩阵的负本征值定义为^[13]

$$E = -2 \sum u_i^- \quad (11)$$

式中: μ^- 是部分转置矩阵的负本征, 对复合系统混合态的一部分单体作部分转置运算后的矩阵仍是半正定的, 当 $E=0$ 时, 子系统处于分离状态; 当 $E=1$ 时, 子系统处于最大纠缠状态; 当 $0 < E < 1$ 时, 子系统处于纠缠状态.

将(3)式代入

$$\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (12)$$

对(12)式中光场密度算符求迹, 得到两原子的约化密度矩阵, 进而得到转置矩阵

$$\rho_{aa}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)c_1c_1^* & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)c_3c_2^* \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)c_2c_2^* & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}c_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\varphi}c_1^* & \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)c_3c_3^* & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)c_2c_3^* & 0 & 0 & \frac{1}{2}[(1 + c_4c_4^*) + \cos\theta(1 - c_4c_4^*)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

ρ 对应的部分转置矩阵负本征值为

$$N(\rho_a) =$$

$$\sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)C_1C_1^* + \frac{1}{2}[(1 + C_4C_4^*) + \cos\theta](1 - C_4C_4^*) \right\}^2 - (1 - \cos\theta)C_1C_1^*(1 + C_4C_4^*) + \cos\theta(1 - C_4C_4^*) + [(1 + C_4C_4^*) + \cos\theta(1 - C_4C_4^*)]^2}$$

$$-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)C_1C_1^* + \frac{1}{2}[(1+C_4C_4^*) + \cos\theta](1-C_4C_4^*)] \quad (14)$$

2.1 原子的纠缠演化随原子的初态变化

当 $g=1, \lambda=1$ 时, 依次计算出(9-10)式、(7-8)式、(4-6)式和(14)式的数值, 并用 Matlab 程序软件对(14)式的计算数值进行作图. 图 1 描述了原子的初态 θ 取不同值时, 两个原子间的纠缠度随时间演化的曲线. 图 1(a)(b)显示 θ 为 $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 时, 两原子的纠缠时间较短, 退纠缠时间大约为纠缠时间的一倍至二倍, 振幅最大值从 0.18 变为 0.52. 图 1(c)(d)显示 θ 为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$ 时, 两原子处于连续纠缠状态, 在两个主波之间出现次波, 不存在退纠缠状态, 振幅最大值从 0.9 变为 0.95, 这表明双原子的初始纠缠状态不但影响原子的纠缠时间, 也影响原子的振幅最大值.

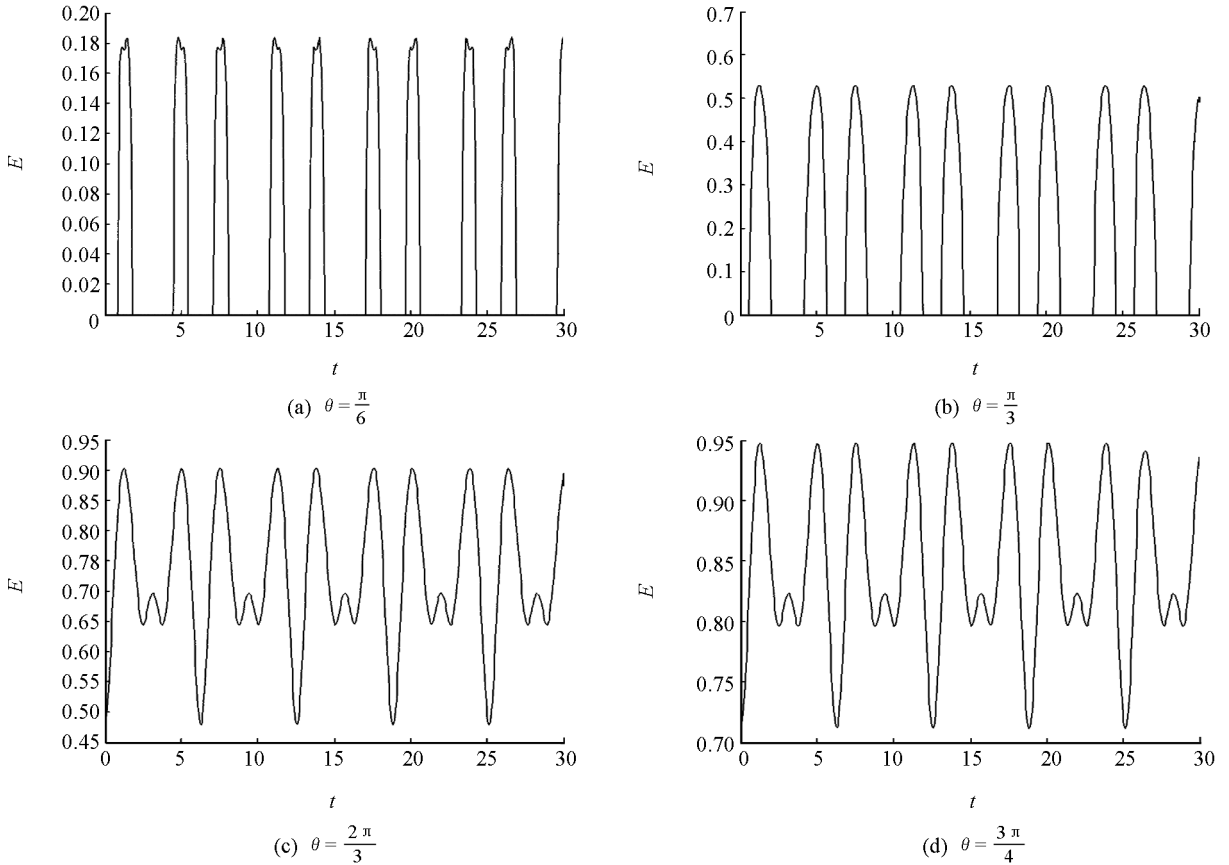


图 1 两原子的纠缠随时间的演化

2.2 原子的纠缠演化随两原子间耦合强度的变化

当 $g=1, \theta=\frac{3\pi}{4}$ 时, 依次计算出(9-10)式、(7-8)式、(4-6)式和(14)式的数值, 并用 Matlab 程序软件对(14)式的计算数值进行作图. 图 2 描述了原子间耦合强度 λ 取不同值时, 两个原子间的纠缠度随时间演化的曲线. 图 2 显示耦合强度 λ 从 1 增加到 15 时, 原子间的纠缠振幅大小不变, 但波的形状从不规则变成了规则的正弦波; 图 2(a)、(b)显示 λ 为 1 和 5 时, 两个主波之间出现锯齿状次波, 原子间纠缠的振幅大小不变, 两原子的纠缠演化周期较短; 图 2(c)、(d)显示 λ 为 10 和 15 时, 次波基本消失, 形成规则的正弦函数曲线, 周期逐渐增大, 但不存在退纠缠状态.

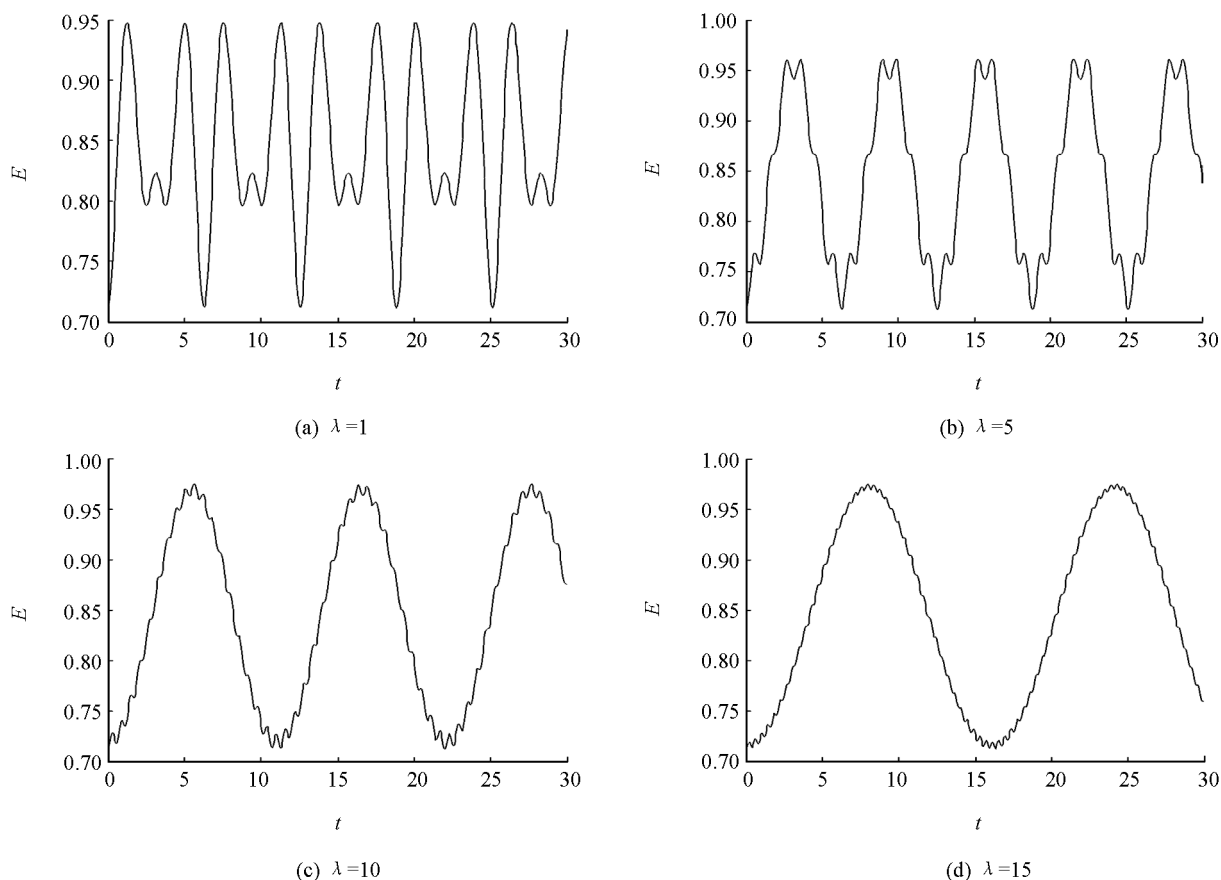


图 2 两原子的纠缠随时间的演化

3 结 论

本文在两个二能级原子与光场相互作用系统中,利用部分转置矩阵负本征值计算方法,研究了原子初态和耦合强度对系统纠缠度的影响,结果表明:双原子的初始纠缠状态不但影响原子间的纠缠时间,也影响原子间的振幅最大值,这是由于双原子的初始纠缠状态制约了原子与场之间的作用;两原子间耦合强度影响原子间振荡的周期大小,这是因为原子耦合强度增大,会削弱原子与场之间的作用,使两原子处于连续纠缠的状态。

参考文献:

- [1] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum Computation and Quantum Information [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 500—502.
- [2] VEDRAL V, PLENIN M B, RIPPIN M A, et al. Quantifying Entanglement [J]. Phys Rev Lett, 1997, 78(12): 2275—2279.
- [3] ZHENG S B, GUO G C. Efficient Scheme For Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED [J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(15): 362—367.
- [4] ZHENG S B. One-Step Synthesis of Multiatom Green-Berger-Horne-Zeilinger States [J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(32): 230—234.
- [5] KOLL L. Applications to the Jaynes-Cummings Model [J]. Phys Rev, 1995, A51: 1622—1627.
- [6] 卢道明. 三能级原子与耦合腔相互作用系统中的纠缠特性 [J]. 物理学报, 2012, 61(3): 0303011—0303017.
- [7] 刘平萍, 冉扬强, 李加兴. 含原子运动多光子 J-C 模型中热纠缠现象 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(5): 18—22.

[8] AKHTARSHENAS S J , FARSI M. Negativity as Engankement Degree of the Jaynes-Cummings Model [J]. Physica Scripta, 2007, 75(5): 608—614.

[9] 李玉良. 两能级原子与腔场非共振耦合系统中的纠缠演化及热纠缠现象 [J]. 西南师范大学学报, 2006, 31(6): 64—67.

[10] 邹世乾, 冉扬强, 等. 利用耦合双原子与单模光场相互作用实现控制非门 [J]. 西南大学学报, 2007, 29(7): 44—47.

[11] 左战春, 夏云杰. Tavis-Cummings 模型中三体纠缠态纠缠量的演化特性 [J]. 物理学报, 2003, 52(11): 2687—2693.

[12] 黄春佳, 周 明, 厉江帆, 等. 单模辐射场与耦合双原子相互作用系统中场熵的压缩特性 [J]. 物理学报, 2002, 51(4): 805—808.

[13] PERES A. SeparabilityCriterionforDensityMatrices [J]. Phys Rev Lett, 1996, 77(10): 1413—1418.

Effects of Atomic Initial State and Coupling Intensity on Entanglement of the Quantum System

ZOU Shi-qian¹, SHEN Zhen², DENG Hua-jun¹, ZHOU Shi-yun¹

1. School of Mathematics and Physics, Anshun University, Anshun Guizhou 561000, China;
2. School of Physics and Technology, Southwest University, Chongqing400715, China

Abstract: In the system of two coupling two-level atoms interacting with a single-mode field, effects of a-tomic initial state and coupling intensity on the entanglement of the quantum system are investigated by the method of negative eigenvalue of the partial transposition matrix.The results demonstrate that the en-tanglement between the two atoms shows a periodical oscillation, that the entanglement time between the atoms becomes longer and its amplitude becomes larger with increasing atomic initial state θ , and that the entanglement periodicity between the atoms becomes larger and the subwave diminishes with increasing a-tomic coupling intensity.

Key words: entanglement character; negativity; atomic initial state; atomic coupling intensity

责任编辑 潘春燕

