DOI:10.13718/j.cnki.jsjy.2025.06.010

数学知识本质的符号学分析及其教育意义
——基于皮尔士符号学观点

肖　红
(西南大学 教师教育学院)

摘要:从符号学的观点分析数学知识的本质,并阐释其教育意义,是近年来国内外数学认识论研究的一个走向。基于皮尔士的符号学观点,数学知识的本质体现在数学语境化和去语境化的辩证统一中,主要表现为“图解推理”与“实体抽象”两种思维方式的互补统一。皮尔士符号学的数学认识论对揭示数学学习的实质具有重要意义。根据皮尔士符号学观点下的数学认识论,数学学习的实质即学习者在数学语境化和去语境化的辩证统一中,把握理解数学对象的存在性及其意义发展的一种符号进程活动。在当前“核心素养时代”下的基础教育课程教学改革中,皮尔士符号学观点下的数学认识论,不仅对促进数学知识观的更新提供了理论指导与启发,而且透过其对数学学习实质的揭示,也对数学教学的有效开展和创新型人才培养提供了方法论上的启示。

关键词:皮尔士符号学;数学认识论;数学学习;图解推理;实体抽象

中图分类号:G40-02　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:2095-8129(2025)06-0079-08

基金项目:重庆市社会科学规划项目“新质生产力发展要求的拔尖创新人才一体化培养体系与实现路径研究”(2024NDYB138),项目负责人:余应鸿。

作者简介:肖红,哲学博士,西南大学教师教育学院副教授,硕士生导师。

一、问题的提出

数学知识的本质是什么?这是数学知识论(或认识论)研究的一个基本问题,也是数学教育理论研究的一个基础问题。从哲学层面看,数学学习的基本问题是数学知识的学习何以可能。学习者如何把握和理解数学对象的存在性及其意义?对此问题的回答,主要有两种观点。一种是基于唯理主义的观点。该观点认为,学习者是通过对先验数学知识的内省认知,即通过“回忆(或内省)”来把握数学对象的[1];数学对象的意义在“先天和谐”的知识演绎体系中本身就是清晰明确的。因此,数学学习主要是对客观数学知识的反映。另一种观点是倾向于经验主义的观点。该观点认为数学对象的存在依赖于数学学习者及其学习共同体的社会历史“建构”[2]。数学对象的意义具有历史和社会因素的约定性,并不是纯粹客观和绝对的。因此,数学学习是学习者建构数学知识的一种经验活动。这两种观点在回答“学习者是如何把握理解数学对象的存在性及其意义”的问题上,虽各有其合理性,但都存在一定的片面性。前者片面强调数学知识“先天”的客观必然性,由此认为数学学习主要是对客观数学知识的反映;后者片面强调数学知识的经验建构性,认为数学学习主要是学习者对数学知识的建构。其实,两者都忽略了人与数学对象认识的中介——“符号”——的分析考察。

数学从诞生之日起，数学知识就和符号紧紧连在了一起，因此从符号学的视角研究数学知识的本质就成为一个比较自然的研究取向。近二十年来，国内学者从符号层面着手研究数学知识的本质已成为我国当代数学认识论研究的一个基本走向[3]。已有研究者从符号学角度采用语境分析策略，有效融合数学知识的逻辑、历史及社会层面的合理要素，对数学知识的本质及其产生发展作出了比较全面的考察，并得出如下观点：数学对象及其意义本质上与语境相关[3]。该研究为理解数学知识的本质提供了一个新的视角，具有比较重要的认识论意义。但是，由于这一研究的关注点并不是放在“学习者是如何把握理解数学对象的存在性及其意义”上，特别是它在“语用、语形、语义”三个层面展开对数学知识的语境化解释，其认识论观点的教育意义还有待挖掘。

在国外，运用符号学观点分析讨论数学学习与教学的性质和特点，也已成为很多数学认识论和数学教育理论研究者关注的一个热点[4]。当然，符号学的视域极其宽泛，并且学界对符号的认识也没有一个统一观点。有研究者特别指出：“基于符号学视角，在对数学学习和数学交流的认识论研究中，美国哲学家、实用主义创始人皮尔士(C.S.Peirce)的符号学是迄今为止最好的工具”[5]。德国学者奥堤(M.Otte)开展了基于皮尔士符号学观点的数学认识论研究，并指出，从皮尔士符号学观点看，数学认识论是一种发生认识论[6]。

本研究在已有文献的研究基础上，基于皮尔士的实用主义哲学思想，对皮尔士符号学观点下的数学认识论进行辨析与概括，并以此揭示数学学习的实质，进而阐述其对数学教学活动开展以及创新型人才培养的方法论意义。

二、数学认识对象及其意义的符号学分析

皮尔士定义的符号，具有三元合一性，即符号是由对象(object)、符号(表征)(sign)、解释元(interpretant)三元合一的。一个符号是把另外一件事物(它的对象)和一个第三者(它的意义，或者它的解释元)联系起来的东西[7]112。如图1所示：

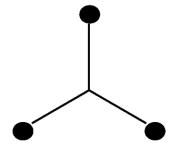

图1　皮尔士三元合一性的符号定义

根据皮尔士的符号学定义，我们不要简单地把符号理解为思维的产物，即一种“符号——对象”二元式的形态，而应持思维即符号的认识态度且符号是三元合一的基本观点。因为“一切思维均用符号，这些符号并没有直接的内容，而要求一个后续思维，一个解释元，将其解释为表象而赋予其意义”[8]44。

(一)数学语境化

数学语境化指认识主体在由符号构成的语境平台上把握数学对象的一种认识方式。根据皮尔士的符号观，数学的语境化主要包含两方面的含义：其一，数学对象的存在依赖于符号表征；其二，图解推理是数学语境化过程中知识扩展的基本思维方式。

1. *数学对象的存在依赖于符号表征*

在认识论的基本立场上，皮尔士不赞成笛卡尔的唯理主义认识论观点，而持实用主义哲学观点。笛卡尔的认识论立场体现在那句著名的断言“我思故我在”中。按照笛卡尔的认识论观点，数学知识是“天赋”的，认识者可通过两种方式来把握理解数学对象及其意义：“直观”(用心灵直接察看)和演绎[9]。皮尔士指出，人根本不存在笛卡尔所说的那种对数学对象的直接知觉能力。因为这种“直观”的所谓清楚明白的知识可能仅是一种主观感觉，且这种感觉也可能是完全错误的。

皮尔士提出“思维即符号”的观点，强调认识者只有通过符号才能把握认识对象本身。他认为，认识者不具有不凭借符号而直接内省的能力，唯一可能得到的认识的思维只有符号中的思维。因为一切思维必然都要用符号。“我们可以找到的唯一思维论据就是以符号思维的事例……唯有通过外在事实思维方可得到

认识”[8]61。

为了说明皮尔士“思维即符号”的观点，这里不妨举一个例子。英国数学家、哲学家怀特海在讨论数学认识的特点时，曾说“注意到7条鱼和7天之间的共同点的人……是第一个具有纯数学观念的人”[10]。如果按照笛卡尔内省“直观”的认识模式，7条鱼和7天之间的共同点在于认识者在心灵中“直观”到了一个“理念”——数“7”。这个数“7”不是来自经验感官，而本身就是理性所固有的，是“天赋”的自在观念。但是，按照皮尔士“思维即符号”的观点看，7条鱼和7天的共同点体现在，我们可以把7条鱼作为符号来表征7天的天数。正是在用7条鱼表征7天的天数，或用7个苹果表征7个小孩的人数等这种以外在事实为根据的符号意指进程中，人们建构出数“7”这个概念，并逐渐发展到用数字符号“7”来表征它，这样就把握住了数“7”这个概念。

2. 图解推理：数学知识扩展的基本思维方式

人们在以符号为中介的语境化平台中才能把握数学认识对象，然而从“思维即符号”的立场来看，数学认识对象的认知产生机制具体又是怎样的呢？要回答这一问题，需要进一步了解皮尔士提出的“图解符号”(diagram)和“图解推理”(diagrammatical thinking)。皮尔士认为，数学的本质是研究符合假设物态的理论[11]222。即数学是人们从纯粹假定的构造物中推出必然结论的一项活动。他区分了两种数学推理方式：一种是推论式推理，另一种为定理性推理。前者指从一般性概念出发必然推出相关个体项的一种直接推理；后者则是一种能产生新知识，具有偶然性的一种间接推理。这是“用以特殊方式构造出来的图示进行的推理”[11]223。因此，从数学知识的扩展来说，运用图解符号进行的图解推理是数学认识的一种基本思维方式。

所谓“图解符号”，皮尔士认为是“通过自己的各个部分之间的类似关系，来代表一个事物的各部分之间的关系”[11]283的一种符号。在符号意指进程中，代表某种类似关系是图解符号的主要功能。比如，代数中表示相关数量关系的一个代数方程式，几何中表示某种空间形式的一个图形，都是图解符号。图解符号在数学知识的产生中发挥着重要作用。皮尔士指出：“数学家在演绎出那些结论时，利用了几何学中被称为‘结构’的东西……这样的结构是按照那个假设提供的规则做出来的。在它形成的过程中，图像由观察来审查，在其组成部分中我们发现新的关系，这些关系没有在结构所依据的规则中陈述过，通过一个小小的精神实验，新的关系总是出现在这个图像中。”[11]234也就是说，在数学中人们依据某种假设规则构建图解符号，然后又依据这些假设规则来运作图解符号，进而在运作图解符号的过程中得到新的发现。这样的一个图解符号构建、运作、审思的过程就是图解推理。它包括以下三个环节：

第一，构建图解。人们在数学活动中面临某个实际问题时，根据问题事态构建出图解符号以代表问题事态的某种关系。这个图解符号对使用者来说可以使问题事态简化，具有简单的代表意义。皮尔士指出“对问题的梗概化和图解化能达到好几个目的，但它的主要目的是剥去那些重要关系的一切伪装，只保留一件具体的外衣”[11]234。因此，根据问题事态构建的图解符号，一方面比问题事态更简单，从而更容易在假设的规则中被运作；另一方面它也不是完全与问题事态无关，而是突出了二者间的某种类似关系。

第二，运作图解。图解推理的第二步是对图解进行运作，即按照图解符号构建时的假设规则对图解符号进行转化。比如，代数关系式在某种代数规则系统内的代数变换，或者几何图形在几何规则体系中的图形转换等都是在运作图解。皮尔士十分重视这一环节。他说，在数学中“只用一般的词进行思考是不充分的，……在几何学中，必须借助辅助线才可以解题，在代数中，也必须做某些允许的变换。只有如此，观察的官能才会发挥作用”[11]223。也就是说，图解符号的运作比抽象知识的演绎更易使人们的观察功能发挥作用，进而对认识者的思想带来启发。

第三，审思图解。当认识者在对图解符号进行运作的过程中，由于有了观察的审查，就

会在图解符号的运作中得到新的发现(或解决问题事态的问题)。

为了明了“图解推理”,在此举一个简单例子。

问题:画一个正方形,使它的面积是单位正方形面积的 2 倍。①

假定解答者没有勾股定理的知识,那么他可以这样开展思考并作出解答:首先,画出一个正方形,使它的面积与单位正方形的面积相同(“构建图解”环节);其次,把 2 个这样的正方形拼在一起,使其画出面积为单位正方形 2 倍的图形,由于这个图形不是正方形,进而把 4 个这样的正方形拼在一起组成一个大正方形(“运作图解”环节);最后,通过对图解的运作进行观察和审思,发现联结 4 个单位正方形的对顶点的 4 条线段所构成的正方形,正是满足问题要求的解,即这个正方形是 2 倍于单位正方形面积的正方形(“审思图解”环节)。如图 2 所示:

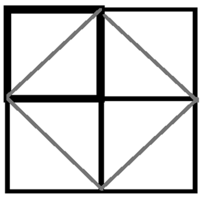

图 2 倍正方形问题

上例问题的解决,并不是根据勾股定理(正方形对角线的长度是边长的$\sqrt{2}$倍)演绎出来的,而是由“图解推理”所致,其结论也是必然的。

在此,还可进一步指出的是:“图解推理”的第一环节“构建图解”需要想象力,第二环节“运作图解”需要专注力,而在第三环节“审思图解”则需要概括力。如此,才能保证在数学认知中得到新发现,并真正把握在“图解推理”中所生成的数学对象。所以,皮尔士曾把“想象力、专注力和概括力”称为数学家必备的三种智力品格[12]。

(二)数学去语境化

由前所述,对数学对象的把握离不开数学知识语境化,但要完整刻画数学知识产生与发展的过程,还需要数学知识“去语境化”这一不可或缺的环节。

1. 实体抽象:数学去语境化的基本方式

所谓数学去语境化,指对数学知识语境化的认知超越,表现为一种实体抽象(hypostatic abstraction)方式。皮尔士在研究数学的本性中,区分了两种不同的抽象:一种是精确抽象,另一种为“实体抽象”。精确抽象,是我们留意知觉对象的某种特点而忽视别的东西的一种思维形式。比如,在平面几何中,我们把直线抽象成没有宽度的由两点确定的线。而实体抽象指把作为谓语形态的一个(或一组)对象的特征或性质转化成一个主语对象[13]。比如,皮尔士举例说:“把‘蜜是甜的’这个命题变成‘蜜有甜性’。‘甜性’在某种意义上可称之为一种虚构的东西,但是归纳它的这种存在方式只不过是‘某些东西是甜的’这个事实。”[11]224 这样“甜性”就成为一个可供谈论或思考的对象了。可以说,实体抽象是现代数学发展的一种基本思维方式。皮尔士强调,实体抽象是数学中每一个真正有用的步骤的重要组成部分[13]。

为了明了数学中的实体抽象及其作用,举例如下:在康托尔的集合论中,“集合”这个概念就是一个实体抽象的结果;“基”又是集合属性的实体抽象;而$\aleph_0$(阿莱夫零)又是可数无限集合的实体抽象。从符号学的认识考察角度来看,由实体抽象产生的数学对象,属于人对数学对象认识的“手段—对象”结构,而不属于“所指—能指”结构[14]。因此,对由实体抽象产生的数学对象,我们就不能单靠逻辑演绎的方式来认识把握它。所以,从发生认识论来看,数学的实体抽象是把思维的认知手段转化为思维对象,通过生成新的数学对象而不断扩展数学知识的领域。人在数学认识中凭借的思维材料或认知手段虽然是离不开符号语境的,但是,通过实体抽象而形成的新的数学对象,已经是脱离原有语境的对象了。这样就不能用原有语境的表征体系来把握它的存在性及其意义了,否则会产生歧义或逻辑上的混乱。

① 对此问题及其解答,可见《柏拉图对话集》中的“枚农篇”。

2. 实体抽象为数学“再语境化”提供了新的认识条件

通过实体抽象，把思维的认知手段转化为对象后，在问题事态中又可以把对象合并到新关系结构中去构建图解符号，为实现数学的“再语境化”提供条件。皮尔士曾举例说：我们把“蜜是甜的”这个命题变成“蜜有甜性”时，“我们是以关系的形态考虑蜜甜这个事实……这样做是为了有利于理解”[11]224。也就是说，我们把“蜜的甜性”作为认识对象，同其他事物建立起某种新的认知关系。如前所述，数学语境化的基本认识方式是运用图解符号进行的“图解推理”。特别是通过对图解进行运作转化，在审思图解阶段，由于认识者观察的官能发挥作用，会感知到图解的某种特征或性质。当这些特征或性质通过实体抽象转化为对象时，一方面实现了数学的去语境化，另一方面又在新的数学语境平台为构建新的图解（关系）提供了条件，从而可以进行新的“图解推理”，使数学再语境化。

总之，皮尔士的认识论强调“并不存在关于任何对象的绝对意义上的第一认识，认识由一个连续的过程产生”[8]71。结合前面的讨论，我们从符号学层面把皮尔士的数学认识论观点概括为：数学知识的本质体现在数学语境化→数学去语境化→数学再语境化→……这样的符号进程中。且这样的符号进程连续不断，发展不止。

（三）数学符号的意义

讨论符号，离不开对符号意义的解释。皮尔士把符号的对象区分为直接对象和动力对象[7]126。所谓符号的直接对象，就是符号所指的当前对象；而符号的动力对象，是指为了有效交流和解释的目的，由符号使用交际双方（或共同体）共享的先在经验或间接经验所构成的东西[15]。所以，符号的动力对象不是符号所指的当前对象，它是符号使用交际双方能够共享的先在经验或间接经验，这些经验通过可验证的认知效果同符号直接对象相关联。符号直接对象和动力对象的区分，保证了符号意指进程具有动态性和开放性。如此，符号的意义有直接意义和动力意义之分：即符号的直接意义是符号所指的当前对象；符号的动力意义则是其动力对象表现出来的认知效果。

根据皮尔士的上述观点，数学符号的意义包含两个方面：一是数学符号的直接意义，即数学符号所指的数学对象及其含义；二是数学符号的动力意义，即数学符号动力对象表现出来的认知效果。由于动力对象是通过先在或间接经验的认知效果与直接对象相关联，它能被符号使用交际双方所共享，所以数学符号的真正意义在于符号动力对象表现出来的可验证的认知效果。

在此不妨举例说明。假如问：“$\sqrt{2}$”这个符号的意义是什么？如果回答：“$\sqrt{2}$”是一个无理数（其含义是无限不循环的十进制小数）。由此就理解了“$\sqrt{2}$”的真正意义了吗？其实并没有。因为，这只是“$\sqrt{2}$”的直接意义。据此还不能清楚地解释和说明为什么“$\sqrt{2}$”可以与其他无理数如“$\sqrt{3}$”等进行加、减、乘、除运算（即两个无限不循环十进制小数怎么可能进行相互运算呢?）。当把“$\sqrt{2}$”解释为一组有理数端点区间套（因为有理数端点区间套在解释说明无理数时具有可验证的认知效果，所以它是“$\sqrt{2}$”的动力对象），其他无理数，如“$\sqrt{3}$”就用另一组有理数区间套来解释。于是，两个无理数之间的运算就可以由它们相应的有理数区间套运算给予清楚地解释与说明。至此可以说，当把“$\sqrt{2}$”解释为一组有理数区间套所确定的数时，才把握了“$\sqrt{2}$”的真正意义。即无理点（数）的所有数学性质可表示为有理端点区间套的性质[16]84。

由于符号进程具有动态性和开放性，因此数学符号的动力对象并不是唯一的。比如，在解释无理数时，无理数的动力对象除了有理数区间套以外，有理数集的戴德金分割、有理数基本序列等也是无理数的动力对象。它们在说明与解释无理数时，同样具有可验证的认知效果，是解释无理数符号的真正意义。

三、皮尔士符号学观点下数学认识论的教育意义

皮尔士符号学观点下的数学认识论是一

种发生认识论。这种观点不是把数学当作一个已经完成的符号知识体系，而是把数学看成运用符号反映与建构数学对象的一种符号进程活动。这种认识论观点具有重要的教育意义。

(一)从符号学层面揭示数学学习的实质

皮尔士符号学观点下的数学认识论为揭示数学学习的实质奠定了认识论基础。根据皮尔士数学认识论，数学认识的产生与发展是一个在符号意指进程中不断经历数学语境化→数学去语境化→数学再语境化的动态认识过程。因此，从这一观点出发，数学学习的实质即学习者在数学语境化和去语境化的辩证统一中，把握理解数学对象的存在性及其意义发展的一种符号进程活动。具体来说，数学学习作为符号进程活动包含以下三个要点：

第一，数学学习是依赖符号表征的符号使用活动。因为学习者对数学对象(包括数学概念、命题、法则等)的认识把握依赖于作为中介的符号表征，不存在可以被学习者直接领悟的，脱离符号表征的所谓“自在”的数学对象。所以，任何数学学习都是一种学习者在学习情境中借助符号表征认识把握数学知识对象的活动。这些数学符号表征依据其代表数学对象的抽象性程度，可以依次区分为操作性实物表征、直观性图形表征、抽象性符号表征。它们有内在关联性，即操作性事物表征在代表某一数学对象时，它的“解释元”是同一对象的直观性图形表征，而直观性图形表征在代表某一数学对象时，它的“解释元”是同一对象的抽象性符号表征。

第二，数学学习还是再创造数学对象的符号建构活动。从普遍性意义上看，数学对象是一种“模式化”的存在。一方面，模式化具有思维的概括性特征；另一方面，建构模式化的数学对象，并用相应的符号表征来代表它，这种符号建构活动具有创造性特征。学生的数学学习是一种“再创造”数学对象的符号建构活动。学生在“图解推理”与“实体抽象”两种思维方式的互补中再创造数学对象。可以说，与对数学知识对象的符号表征只是进行记忆学习相比，具有概括性的再创造数学对象的符号建构活动，才是真正的数学学习。

第三，数学学习也是数学符号意义的符号解释活动。数学学习的真正发生，不但在于再创造数学符号对象的活动中，而且还在于对再创造数学符号对象意义的解释活动中。因为后者不仅是完整的数学学习不可或缺的组成部分，也是检验学习是否真正发生的一个标准。数学对象符号意义的解释包括两个方面：一方面是理解数学符号的直接对象及含义，并对其进行运用；另一方面是探寻数学符号的动力对象，理解数学符号的动力意义。

总之，根据皮尔士符号学的数学认识论，数学学习的实质即学生同教师(若考虑到教师因素)一起使用、再创造、解释各种抽象层次的数学符号表征，把握理解数学对象的存在性及其意义发展的一种符号进程活动。

(二)从符号学层面阐明有效数学教学的开展

依据对数学学习实质的分析，教师在教学中应做的就是如何创设数学符号进程活动开展的有效环境与条件，从而促进学生把握理解数学对象的存在性及其意义。

首先，在教学中应避免学生可以直接把握数学对象的存在性这样的认识误区。数学对象作为模式化的存在，其本身是抽象的。因此学生不可能离开符号表征的使用，而直接把握数学对象的存在性。教师在教学中应意识到，首先要引导学生使用比较具体的符号表征来把握数学知识，然后在符号“三元合一”性的关联中，逐级使用抽象性更强的符号表征。教师特别应注意的是，在和学生一起使用数学符号表征来建构数学对象时，一方面，要把数学符号表征与数学对象相区分，避免二者的混淆；另一方面，当建构出数学对象后，又要防止数学对象与数学符号表征的脱节。

其次，在教学中应避免忽视对数学对象建构思维方式的启发。对于学生来说，所学习的数学对象是在符号进程中再创造出来的。数学对象是由“图解推理”与“实体抽象”两种思维方式互补而生成的。因此，为了使学生切实把握住数学对象的存在性，教师在教学中要注意数学对象建构的思维过程和方式。也即：要

引导学生在具体的情境问题中，利用图解符号展开“图解思维”，经历构建图解、运作图解、审思图解三个必要的环节[17]；启发学生把思维的手段转化为思维的对象，实现“实体抽象”，从而再创造数学对象。

最后，在教学中应避免对数学符号的意义进行单一的直接解释。因为数学符号的意义包含两个方面，一是数学符号的直接意义，二是数学符号的动力意义。数学符号的动力意义才是数学符号的真正意义。因此在教学中，教师应避免对数学符号意义进行单一的直接解释。尤其是，仅仅关注学生是否获得了数学符号的直接意义，强调数学符号的形式规则运用，而造成“在运用符号时，……使学生养成机械的、而不是富有思想的学习态度”[18]的情形。教师应当意识到，要和学生一起用先在或间接经验的可验证认知效果来解释数学符号的意义。比如，在解释函数概念时，可用直角坐标系中的某种图像特征与函数概念联系起来，或者用两种表格的某种对应与函数概念联系起来，也可用两个数集之间的某种对应关系来解释函数概念，等等。从而避免学生对函数概念进行静止、孤立的形式化理解。

(三)对创新型人才培养提供方法论意义

皮尔士符号学观点下的数学认识论认为，数学是人们在符号进程中的探究活动。这种观点对创新型人才的培养具有重要的方法论意义。

第一，发展探究意识，培养直觉想象力。皮尔士始终强调：“数学是这样一门学科，它从理想的或纯粹假定性的构造物里得出必要的结论。”[7]11假定的形成正是数学发现的关键，因为假定是探究的产物。皮尔士曾用“溯因推理”(abduction，也有译为“不明推理”)解释科学发现的机制[7]72。所谓“溯因推理”，就是“从一个令人惊奇的事实出发，得出关于这个事实的假设性的说明，最后得到关于这个假说为真的可能性”[19]。“图解推理”的第一步：构建图解，实质上就是在符号活动中的“溯因推理”。因为，在数学中面临一些令人惊奇(或困惑)的个例时，为了简化的需要，通过对个例中的某种类似关系的领悟，想象并构建出图解符号来指示它，这样的图解符号此时就是代表或解释个例的一种具有一般性或普遍性的假定。一些数学家也曾说，“在直觉指引下的构造性思想是数学动力的真正源泉”[16]226。因此，要培养学生的创新思维或意识，首要的是发展他们在认知困惑中的探究意识，培养对困惑形成假定的直觉思维和想象能力。

第二，锻炼专注品质，培养概括能力。具备专注的品质和突出的概括力，也是人们在作出创新时需要的另一重要条件。从一定意义上来说，创新就是在不断变化的问题背景中抓住问题证据的关键，对证据进行转化或重新组合，进而超越这些证据获得新的洞见，形成概括性的成果。“图解推理”的后两步：运作图解、审思图解，以及作出“实体抽象”，就要求学生具备专注的品质和概括能力。特别是，“实体抽象”所要求的那种概括，是超越已有证据的去语境化的概括。这种概括能摆脱现有证据的局部限制，获得新的意义。因此，要培养学生的创新思维或意识，还需要重视锻炼，培养他们在探究活动中的专注品质和概括能力。

第三，确立和培养创新具有“连续性”的信念。皮尔士相信宇宙里的一切都是由连续性原理规范着的心智组成[7]93。因此，创新并不是认识上的从无到有。其实，在知识的创新发展中，我们都会体会到，一方面知识信息量在不断增多，另一方面那种对知识起着支持性或组织性作用的内在结构(或规律)也在不断增强。这种情形对皮尔士来说，是一种具有连续性的“创造性的爱的进化”[7]94。而“爱”主要是一种思想意识，指人对创造物和已有物合而为一的一种和谐一致的意识。因此，要培养学生的创新意识，就有必要帮助他们确立创新具有连续性特征的信念，以及建立知识之间具有和谐一致、相互适应的知识进化意识。当下，创新具有连续性的信念，对我们开展课程内容结构化整合，探索发展学生核心素养的有效途径，在思想上具有重要的启示意义。

总之，皮尔士作为“哲学家的哲学家”[7]8，“他的哲学在很大意义上是一种创造中的哲学”[7]9，其深刻而广泛的思想对很多学术领域的研究都产生了影响。特别是在当前核心素

养时代下的课程改革中，我们关注的不仅包括育人标准的改变，而且还包括知识观层面上的深层变革，以及学习方式、教学方式的有效改善。若能借鉴并运用皮尔士的哲学思想及其符号学观点对这些问题进行进一步的深入探讨，或许是一个很有意义的研究切入点。

参考文献：

［1］ 徐利治．数学中的现代柏拉图主义与有关问题［J］．数学教育学报，2004(3)：1-5.

［2］ ERNEST P. Social constructivism as a philosophy of mathematics［M］. Albany：State University of New York Press，1998：243-244.

［3］ 郭贵春，康仕慧．当代数学哲学的语境选择及其意义［J］．哲学研究，2006(3)：74-81，129.

［4］ SÁENZ - LUDLOW A，PRESMEG N. Guest editorial semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically［J］. Educational Studies in Mathematics，2006，61(1-2)：1-10.

［5］ HOFFMANN M H G. What Is a "semiotic perspective"，and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue［J］. Educational Studies in Mathematics，2006，61(1-2)：279-291.

［6］ OTTE M. Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view［J］. Educational Studies in Mathematics，2006，61(1-2)：11-38.

［7］ 科尼利斯·瓦尔．皮尔士［M］．郝长墀，译．2 版．北京：中华书局，2014.

［8］ 皮尔士．皮尔士论符号［M］．徐鹏，译．上海：上海译文出版社，2016.

［9］ 笛卡尔．探求真理的指导原则［M］．管震湖，译．北京：商务印书馆，2005：10-13.

［10］ A. N. 怀特海．科学与近代世界［M］．何钦，译．北京：商务印书馆，1959：20.

［11］ 涂纪亮．皮尔斯文选［M］．涂纪亮，周兆平，译．北京：社会科学文献出版社，2006.

［12］ C. 德 ·瓦，董立河．为什么形而上学需要逻辑学，而数学则不需要［J］．世界哲学 2005(6)：96-104.

［13］ BAKKER A，HOFFMANN M H G. Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts：a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution［J］. Educational Studies in Mathematics，2005，60(3)：333-358.

［14］ 肖红，郑毓信．数学对象认识的符号学考察［J］．科学技术哲学研究．2012(4)：29-34.

［15］ 赵星植．论皮尔斯符号学中的"对象"问题［J］．中国外语，2016(2)：48-53.

［16］ R. 柯朗，H. 罗宾．什么是数学：对思想和方法的基本研究［M］．左平，张饴慈，译．4 版．上海：复旦大学出版社，2017.

［17］ HOFFMANN M H G. How to get it. Diagrammatic Reasoning as a Tool of Knowledge Development and Its Pragmatic Dimension［J］. Foundations of Science，2004，9(3)：285-305.

［18］ 杜威．我们怎样思维·经验与教育［M］．姜文闵，译，北京：人民教育出版社，2004：195.

［19］ 江怡．皮尔士准则、溯因推理与最佳解释［J］．哲学分析，2023(8)：3-19.

Mathematical Epistemology and Its Educational Significance from the Views of Peirce's Semiotics

XIAO Hong

(*College of Teacher Education*，*Southwest University*，*Chongqing* 400715，*China*)

Abstract：Analyzing the essence of mathematical knowledge from the perspective of semiotics has become a basic trend in domestic and international mathematical epistemology research in recent years，and has also provided a new perspective for mathematics education research. From the perspective of Peirce's semiotics，the essence of mathematical knowledge is embodied in the dialectical unity of contextualization and decontextualization. Corresponding to mathematical learning，it means that learners grasp the development of both the 'meaning' and the 'existence' of mathematical objects" in the dialectical unity of mathematical contextualization and decontextualization. "Diagrammatical thinking" and "hypostatic abstraction" are the two mathematical thinking modes proposed by Peirce. They are complementary in the process of the generation and development of mathematical knowledge，providing an analytical framework for explaining the essence of mathematical learning. They also provide beneficial enlightenment for the effective development of mathematics teaching under the current "core literacy era" and the cultivation of students' innovative thinking.

Key words：Peircean semiotics；mathematical epistemology；mathematics learning；diagrammatical thinking；hypostatic abstraction

责任编辑　谭小军　李　双