第 36 卷第 7 期　西南大学学报(自然科学版)　2014 年 7 月
Vol. 36 No. 7　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Jul. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.008

用 Ekeland 变分原理证明山路引理的一个注记①

饶若峰，　黄家琳

宜宾学院 数学研究所，四川 宜宾 644007

摘要：用 Ekeland 变分原理证明了山路引理，补充完善了以往证明中缺失的一些重要环节和细节.

关 键 词：山路引理；Ekeland 变分原理；Palais-Smale 条件

中图分类号：O176　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)7-0049-04

自 1973 年文献[1]提出山路引理以来，山路引理及其各种推广和变形都已被广泛地应用到各类变分问题中去了. 关于山路引理的证明，也有各种版本的证明，如文献[2－5]中用 Ekeland 变分原理证明了山路引理. 虽然这些证明是完整的，但在一些细节上未给出详尽而浅显易懂的论证. 为此，本文的目的是对所有细节给出充分的补注和论证，使得山路引理的证明更详尽易懂.

首先我们给出本文主要工具- Ekeland 变分原理：

引理 1[4] (Ekeland变分原理)　设(X, d)是一完备的度量空间. $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$是真函数，即$f \not\equiv +\infty$. 若 f 下有界且下半连续，并且存在 $\varepsilon > 0$，及相关 $x_\varepsilon \in X$，使得 $f(x_\varepsilon) < \inf\limits_X f + \varepsilon$，则必存在 $y_\varepsilon \in X$ 使得

1) $f(y_\varepsilon) \leqslant f(x_\varepsilon)$，

2) $d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqslant 1$，

3) $f(x) > f(y_\varepsilon) - \varepsilon d(y_\varepsilon, x)$，$\forall x \in X \backslash \{y_\varepsilon\}$.

此外，还需要给出下文将要用到的一个紧性条件- Palais-Smale 条件的定义.

定义 1　设 X 是一个 Banach 空间，$f \in C^1(X, \mathbb{R}^1)$. 如果任意满足

$$f(x_j) \to c,\ \| f'(x_j) \| \to 0$$

的序列$\{x_j\}_1^\infty \subset X$ 都有收敛的子列，那么我们说 f 在值 c 满足 Palais-Smale 条件，记作 PS_c.

这里不妨给出本文常用到的 Gâteaux 导数和 Fréchet 导数的定义：

定义 2　设 X 是一个 Banach 空间，$f \in C(X, \mathbb{R}^1)$. $x_0 \in U \subset X$，U 是一个开邻域. 我们称 f 在点 x_0 处有 Gâteaux 导数，如果 $\forall h \in X$，存在 $\mathrm{d}f(x_0, h) \in \mathbb{R}^1$，使得

$$f(x_0 + th) - f(x_0) - t\mathrm{d}f(x_0, h) = o(t),\ t \to 0,\ \forall x_0 + h \in U$$

进一步如果存在 $\xi \in X^*$ 使得

$$| f(x) - f(x_0) - \langle \xi, x - x_0 \rangle | = o(\| x - x_0 \|),\ x \to x_0$$

则称 ξ 是 f 在 x_0 处的 Fréchet 导数. 记作

$$f'(x_0) = \xi$$

注意，定义 1 中的导数就是指 Fréchet 导. 现用上述原理及概念证明以下山路引理：

定理 1[4] (山路引理)　设 X 是一个 Banach 空间，$f \in C^1(X, \mathbb{R}^1)$；又设 $\Omega \in X$ 是一个开集，$p_0 \in \Omega$，$p_1 \notin \overline{\Omega}$ 为给定两点. 假设

① 收稿日期：2013-04-17
基金项目：四川省科技厅重点资助项目(2012JYZ010)；四川省教育厅重点资助项目(14ZA0274，12ZB349).
作者简介：饶若峰(1969-)，男，江西抚州人，教授，硕士，主要从事偏微分方程存在性与稳定性研究.

$$\alpha = \inf_{x \in \partial\Omega} f(x) > \max\{f(p_0), f(p_1)\} \tag{1}$$

并且 f 满足 PS_c 条件，其中

$$c = \inf_{l \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} f \circ l(t) \tag{2}$$

$$\Gamma = \{l \in C([0,1], X): l(i) = p_i, i = 0,1\} \tag{3}$$

则 $c \geqslant \alpha$ 是泛函 f 的一临界值，(2) 式中 $f \circ l(t) = f(l(t))$.

证 由于本证明主要用到 Ekelnd 变分原理，故以下先要证明山路引理中的条件足够满足 Ekelnd 变分原理中的条件，从而有 Ekelnd 变分原理中的结论. 再结合泛函 f 满足的 PS_c 条件，最后获得山路引理的结论. 我们拟将全部证明分 3 步进行：

1) 构造完备的度量空间(Γ, d) 与泛函 I(真函数).

在 Γ 上引入度量

$$d(l_1, l_2) = \max_{t \in [0,1]} \| l_1(t) - l_2(t) \|$$

使(Γ, d) 成为一完备度量空间. 这是因为连续函数 $l_1 - l_2$ 在闭区间上存在最大值，并且柯西列按该度量在 Γ 内收敛. 注意到按此度量收敛的函数列$\{l_n(t)\}$ 的极限函数 $l(t)$ 必满足边值条件 $l(0) = p_1$，$l(1) = p_2$. 再定义如下泛函 I：

$$I(l) = \max_{t \in [0,1]} f \circ l(t)$$

那么显然有 $I(l) = m_l$，其中 m_l 是与 l 相关的确定常数. 故 $I: X \longrightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ 必是真函数.

2) 验证泛函 I 的下半连续性.

由假设(1) 以及 p_0, p_1 的位置知存在 $x_l \in \partial\Omega$($\partial\Omega$ 与 $l(t)$ 必相交于 x_l) 使得

$$I(l) = \max_{t \in [0,1]} f \circ l(t) \geqslant f(x_l) \geqslant \inf_{x \in \partial\Omega} f(x) = \alpha \tag{4}$$

即 I 下有界. 注意到，

$$| I(l_1) - I(l_2) | \leqslant \max_{t, \theta \in [0,1]} \| f'(\theta l_1(t)) + (1-\theta) l_2(t) \| \cdot \| l_1(t) - l_2(t) \| \leqslant$$
$$C_{f', l_1, l_2} \cdot d(l_1, l_2)$$

故 I 必满足下半连续.

3) 运用 Ekeland 变分原理的相关结论以及泛函 f 满足的 PS_c 紧性条件，证明 c 是泛函 f 的临界值，即证明存在 $x_* \in \Gamma$，使得 $f(x_*) = c$ 且 $f'(x_*) = 0$.

由下确界 $c = \inf_{l \in \Gamma} I(l)$ 的定义知，对任意给定的自然数 n，存在$\{l_n\} \subset \Gamma$，使得

$$c \leqslant I(l_n) < c + \frac{1}{n} \tag{5}$$

现在 Ekeland 变分原理中，取 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$，$x_\varepsilon = l_n = y_\varepsilon$，则对于任意 $l \neq l_n$，有

$$I(l) > I(l_n) - \frac{1}{n} d(l, l_n) \tag{6}$$

令

$$M(l) = \{s \in [0,1]: f \circ l(s) = I(l), l \in \Gamma\}$$

由 $f \circ l$ 的连续性 知 $M(l)$ 必非空. 又易证 $M(l)$ 也是闭的，即$\{s_k\} \subset M(l)$，$s_k \rightarrow s_*$. 而 $f \circ l(s_k) \equiv I(l)$，故由 $f \circ l$ 的连续性知 $f \circ l(s_*) = I(l)$，从而 1 维有界闭集 $M(l)$ 是紧集. 由(1) 和(4) 式以及 I 的定义知$\{0, 1\} \cap M(l) = \varnothing$.

记 $\Gamma_0 = \{\psi \in C([0,1], X): \psi(i) = \theta, i = 0,1\}$，这里 $\theta \in X$ 系零元，因按照线性组合封闭，故 Γ_0 为 $C([0,1], X)$ 的一线性闭子空间，且其模为

$$\| \psi \|_{\Gamma_0} = \max_{t \in [0,1]} \| \psi(t) \|$$

显然，对 $h \in \Gamma_0$，$\| h \|_{\Gamma_0} = 1$，有 $l_n + \lambda_j h \in \Gamma$(因为$(l_n + \lambda_j h)(0) = p_0$，$(l_n + \lambda_j h)(1) = p_1$). $\forall \lambda_j$，$\forall \xi_j \in M(l_n + \lambda_j h)$，由 Ekeland 变分原理结论 3) 有

$$I(l_n + \lambda_j h) > I(l_n) - \varepsilon d(l_n + \lambda_j h, l_n) \tag{7}$$

又由 ξ_j 的定义以及 $I(l_n)$ 定义知

$$I(l_n+\lambda_j h)=f\circ(l_n+\lambda_j h)(\xi_j),\ I(l_n)\geqslant f\circ l_n(\xi_j)$$
$$d(l_n+\lambda_j h,\ l_n)=\max_{t\in[0,1]}\|\lambda_j h(t)\|=\lambda_j\|h\|_{\Gamma_0}=\lambda_j$$

故由(7)式有

$$f\circ(l_n+\lambda_j h)(\xi_j)>f\circ l_n(\xi_j)-\lambda_j\frac{1}{n}\tag{8}$$

注意到$\{\xi_j\}\subset M(l_n+\lambda_j h)\subset[0,1]$，从而存在子列，不妨就记为$\{\xi_j\}$以及$\eta_n\in[0,1]$使得$\xi_j\to\eta_n$. 当$\lambda_j\to 0^+$时，由(8)式有

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n),h(\eta_n))\geqslant-\frac{1}{n}\tag{9}$$

那么当$\lambda_j\to 0^-$时，由(8)式有

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n),h(\eta_n))\leqslant-\frac{1}{n}\tag{10}$$

从而

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n),h(\eta_n))=-\frac{1}{n}$$

下面证明存在$\eta_n^*\in M(l_n)$使得其中 Gâteaux 导

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n^*),\varphi)=-\frac{1}{n},\ \varphi\in X,\ \|\varphi\|=1\tag{11}$$

即以下两式同时成立：

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n^*),\varphi)\geqslant-\frac{1}{n},\ \varphi\in X,\ \|\varphi\|=1\tag{12}$$

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta_n^*),\varphi)\leqslant-\frac{1}{n},\ \varphi\in X,\ \|\varphi\|=1\tag{13}$$

从而(11)式成立. 因而

$$|\mathrm{d}f(l_n(\eta_n^*),\varphi)|=\frac{1}{n},\ \varphi\in X,\ \|\varphi\|=1\tag{14}$$

令$x_n=l_n(\eta_n^*)$，则由 Fréchet 导数定义，

$$|f'(x_n)|=\sup_{\varphi\in X,\ \|\varphi\|=1}|\mathrm{d}f(x_n,\varphi)|=\frac{1}{n}\tag{15}$$

而$\eta_n^*\in M(l_n)$则$I(l_n)=f\circ l_n(\eta_n^*)=f(x_n)$，故由(5)式有

$$c\leqslant f(x_n)<c+\frac{1}{n}\tag{16}$$

由(15),(16)式以及PS_c条件知，$\{x_n\}$存在收敛子列收敛于x_*，从而由(15),(16)式知，$f(x_*)=c$且$f'(x_*)=0$.

关键需证明(12)和(13)式. 先用反证法来证(12)式.

假如不存在η_n^*使(12)式成立. 则对任意$\eta\in M(l_n)$，存在$v_\eta\in X$，$\|v_\eta\|=1$满足

$$\mathrm{d}f(l_n(\eta),v_\eta)<-\frac{1}{n}$$

由$f\in C^1(X,\mathbb{R}^1)$，以及l_n的连续性知，存在η的一邻域$\mathcal{O}_\eta\subset(0,1)$(因为$M(l_n)\subset(0,1)$)使得

$$\mathrm{d}f(l_n(\xi),v_\eta)<-\frac{1}{n},\ \forall\xi\in\mathcal{O}_\eta$$

而$M(l_n)$是紧集，由有限覆盖定理知，存在某自然数m使得

$$M(l_n)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\eta_i},\ \eta_i\in M(l_n),\ i=1,2,\cdots,m$$

相应地存在系列$\{v_{\eta_i}\}$，$\|v_{\eta_i}\|=1$，$i=1,2,\cdots,m$使得

$$\mathrm{d}f(l_n(\xi),v_{\eta_i})<-\frac{1}{n},\ \forall\xi\in\mathcal{O}_{\eta_i},\ i=1,2,\cdots,m\tag{17}$$

则可构建$\{\mathcal{O}_{\eta_i}\}$的一单位分解：$0\leqslant\rho_i\leqslant 1$，$\mathrm{supp}\,\rho_i\subset\mathcal{O}_{\eta_i}$，$1\leqslant i\leqslant m$，满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \rho_i(\xi) = 1 & \forall \xi \in M(l_n) \\ \rho_i(\xi) = 0 & \forall \xi \in [0, 1] \backslash M(l_n) \end{cases} \tag{18}$$

令

$$v = v(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(\xi) v_{\eta_i}, \ \xi \in [0, 1]$$

注意到 $M(l_n) \subset (0, 1)$，由(18)式第二式，$v(0) = v(1) = \theta$(零元). 又

$$\| v \| = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(\xi) \| v_{\eta_i} \| = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(\xi) = 1, \ \xi \in [0, 1]$$

所以 $v \in \Gamma_0$. 再由(17)式以及(18)式有

$$\mathrm{d}f(l_n(\xi), v(\xi)) < -\frac{1}{n}, \ \forall \xi \in [0, 1]$$

这与(9)式矛盾. 这就证明了(12)式. 类似可证(13)式. 证毕.

注 1　本文在(9)式和(10)式处的证明不同于以往文献[3-4].

注 2　本文(16)式的获得过程也不同于以往文献[3-4].

注 3　本文关于(12)式与(13)式的证明不同于以往文献[3-4]，而以往文献[3-4]没有证明(13)式.

致谢：感谢审稿专家的宝贵意见和建议！感谢四川大学数学学院张世清教授在本文初稿完成时指正了其中的一些笔误.

参考文献：

[1]　AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. Journal of Functional Analysis, 1973, 14(1): 349-381.

[2]　EKELAND I. Nonconvex Minimization Problems [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1979, 1(3): 443-474.

[3]　MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[4]　张恭庆. 变分学讲义 [M]. 高等教育出版社，北京，2011.

[5]　史树中. 山路引理的一个证明 [J]. 数学学报，1985，1：348-355.

[6]　杜其武，唐春雷. 具有加权 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程的无穷多个任意小解 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(6)：131-135.

[7]　高婷梅，唐春雷. 1 类超线性 p-拉普拉斯方程多解的存在性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(6)：141-145.

On the Proof of the Mountain Pass Theorem via Ekeland's Variational Principle

RAO Ruo-feng,　HUANG Jia-lin

Institute of Mathematics, Yinbin University, Yibin Sichuan 644007, China

Abstract: In this paper, the mountain pass theorem is proved in detail by Ekeland's variational principle, in which some important missing details in previous studies are supplemented.

Key words: mountain pass theorem; Ekeland's variational principle; Palais-Smale condition

责任编辑　张　枸