DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.009

一类具有修正的 Leslie-Gower 功能函数的捕食-食饵模型的全局渐近稳定性①

周　军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了一类具有扩散和修正的 Leslie-Gower 功能函数的捕食-食饵模型的全局渐近稳定性，推广了已有结论.

关　键　词：捕食-食饵模型；修正的 Leslie-Gower 功能函数；全局渐近稳定

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)7-0053-05

利用反应扩散方程来研究种群模型是近年来生物数学研究的一个热门话题[1-5]. 本文主要研究如下一类具有扩散和修正的 Leslie-Gower 功能函数的捕食-食饵模型的平衡解的全局稳定性：

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = u(1-u) - \dfrac{kuv}{a+u+mv} & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t - d_2 \Delta v = v\left(\delta - \dfrac{\beta v}{u+b}\right) & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,\ 0) = u_0(x),\ v(x,\ 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域；常数 $a, b, k, \delta, \beta > 0$；$\nu$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向；齐次边界条件表示该模型的边界流为 0；$d_1, d_2 > 0$ 表示扩散系数；初值 $u_0(x), v_0(x)$ 是满足相容性条件的非负非平凡的连续可微函数.

通过计算可知如果条件 $a\beta + m\delta b > k\delta b$ 成立，模型(1) 有唯一的正常数平衡解$(u_*,\ v_*)$，其中

$$v_* = \frac{\delta(u_* + b)}{\beta}$$

$$u_* = \frac{-(k\delta - \beta - m\delta + a\beta + m\delta b) + \sqrt{(k\delta - \beta - m\delta + a\beta + m\delta b)^2 - 4(\beta + m\delta)(k\delta b - a\beta - m\delta b)}}{2(\beta + m\delta)}$$

文献[1] 主要研究了模型(1)$(u_*,\ v_*)$ 的全局稳定性，其主要结果如下：

定理 A　假设 $m > k$，$\beta > m\delta$，那么$(u_*,\ v_*)$ 是全局渐近稳定的.

本文的主要目的是推广定理 1，我们的主要结果如下：

---

① 收稿日期：2013-10-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11201380).
作者简介：周　军(1981-)，男，四川成都人，副教授，主要从事偏微分方程和动力系统的研究.

定理 1 假设 $a\beta+m\delta b>\max\{k\delta b,\ k\delta b+k\delta-m\delta\}$，$a\beta+m\delta b\geqslant k\delta b+m\delta-\beta$ 并且 $(1+a)m\geqslant k$，那么 $(u_*,\ v_*)$ 是全局渐近稳定的.

注 1 显然在定理 A 的假设条件下，定理 1 的假设条件成立，所以定理 1 推广了定理 A.

本节的主要目的是证明定理 1，主要方法来自于文献[5]. 首先引入如下引理，其证明可参见文献[6].

引理 1 假设 $f(s)\in C^1([0,+\infty))$，常数 $d>0$，$\gamma\geqslant 0$，$T\in[0,+\infty)$，函数 $w\in C^{2,1}(\Omega\times(T,+\infty))\cap C^{1,0}(\overline{\Omega}\times[T,+\infty))$ 是正函数，则如下结论成立：

如果 w 满足

$$\begin{cases} w_t-d\Delta w\leqslant(\geqslant)w^{1+\gamma}f(w)(\alpha-w) & (x,\ t)\in\Omega\times(T,+\infty), \\ \dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0 & (x,\ t)\in\partial\Omega\times(T,+\infty) \end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数，则有

$$\limsup_{t\to+\infty}\max_{\overline{\Omega}}w(\cdot,\ t)\leqslant\alpha\left(\liminf_{t\to+\infty}\min_{\overline{\Omega}}w(\cdot,\ t)\geqslant\alpha\right)$$

定理 1 的证明 由模型(1)的第一个方程可知 $u_t-d_1\Delta u\leqslant u(1-u)$，则有引理 1 可知

$$\limsup_{t\to+\infty}\max_{\overline{\Omega}}u(\cdot,\ t)\leqslant 1=\overline{u}_1$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 $T_1^\varepsilon\geqslant 1$ 使得当 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $t\geqslant T_1^\varepsilon$ 时，$u(x,\ t)\leqslant\overline{u}_1+\varepsilon$. 利用(1)式的第二个方程可知对 $x\in\Omega$ 和 $t>T_1^\varepsilon$ 有

$$v_t-d_2\Delta v\leqslant v\left(\delta-\frac{\beta v}{\overline{u}_1+\varepsilon+b}\right)=\frac{v}{\overline{u}_1+\varepsilon+b}(\delta(\overline{u}_1+\varepsilon+b)-\beta v)$$

所以由引理 1 可知

$$\limsup_{t\to+\infty}\max_{\overline{\Omega}}v(\cdot,\ t)\leqslant\frac{\delta(\overline{u}_1+b)}{\beta}=\overline{v}_1$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 $T_2^\varepsilon\geqslant 1$ 使得当 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $t\geqslant T_2^\varepsilon$ 时，$u(x,\ t)\leqslant\overline{v}_1+\varepsilon$. 用(1)式的第一个方程可知对 $x\in\Omega$ 和 $t>T_2^\varepsilon$ 有

$$u_t-d_1\Delta u\geqslant u\left(1-u-\frac{k(\overline{v}_1+\varepsilon)}{a+u+m(\overline{v}_1+\varepsilon)}\right)=u\,\frac{(u-\overline{u}_2^\varepsilon)(\overline{u}_1^\varepsilon-u)}{a+m(\overline{v}_1+\varepsilon)+u}$$

其中

$$\begin{cases} \overline{u}_1^\varepsilon=\dfrac{-(a+m(\overline{v}_1+\varepsilon)-1)+\sqrt{(a+m(\overline{v}_1+\varepsilon)-1)^2+4(a+(m-k)(\overline{v}_1+\varepsilon))}}{2} \\ \overline{u}_2^\varepsilon=\dfrac{-(a+m(\overline{v}_1+\varepsilon)-1)-\sqrt{(a+m(\overline{v}_1+\varepsilon)-1)^2+4(a+(m-k)(\overline{v}_1+\varepsilon))}}{2} \end{cases}$$

利用 $a\beta+m\delta b>k\delta b+k\delta-m\delta$ 可知对 $\varepsilon>0$ 充分小，$\overline{u}_1^\varepsilon>0$，$\overline{u}_2^\varepsilon<0$. 所以由引理 1 和 ε 的任意性可知

$$\liminf_{t\to+\infty}\min_{\overline{\Omega}}u(\cdot,\ t)\geqslant\overline{u}_1^0=\underline{u}_1>0$$

其中

$$\overline{u}_1=\frac{-(a+m\overline{v}_1-1)+\sqrt{(a+m\overline{v}_1-1)^2+4(a+(m-k)\overline{v}_1)}}{2}$$

通过计算可知 $\overline{u}_1<\overline{u}_1$. 对任意的 $0<\varepsilon<\overline{u}_1$，存在常数 $T_3^\varepsilon\geqslant 1$ 使得对 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $t\geqslant T_3^\varepsilon$ 有 $u(x,\ t)\geqslant\underline{u}_1-\varepsilon$. 从而对 $(x,\ t)\in\Omega\times[T_3^\varepsilon,\ \infty)$ 有

$$v_t-d_2\Delta v\geqslant v\left(\delta-\frac{\beta v}{\underline{u}-\varepsilon+b}\right)$$

由上可知

$$\liminf_{t\to\infty}\min_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\geqslant\frac{\delta(\underline{u}_1+b)}{\beta}=\underline{v}_1<\bar{v}_1$$

从而对任意的 $0<\varepsilon<\underline{v}_1$，存在常数 $T_4^{\varepsilon}\geqslant 1$ 使得 $x\in\bar{\Omega}$ 和 $t\geqslant T_4^{\varepsilon}$ 有 $v(x,t)\geqslant\bar{v}-\varepsilon$. 利用模型(1)的第一个方程，对 $x\in\bar{\Omega}$ 和 $t>T_4^{\varepsilon}$ 我们有

$$u_t-d_1\Delta u\leqslant u\left(1-u-\frac{k(\underline{v}_1+\varepsilon)}{a+u+m(\underline{v}_1+\varepsilon)}\right)=u\,\frac{(u-\underline{u}_2^{\varepsilon})(\underline{u}_1^{\varepsilon}-u)}{a+m(\underline{v}_1+\varepsilon)+u}$$

其中

$$\begin{cases}\underline{u}_1^{\varepsilon}=\dfrac{-(a+m(\underline{v}_1+\varepsilon)-1)+\sqrt{(a+m(\underline{v}_1+\varepsilon)-1)^2+4(a+(m-k)(\underline{v}_1+\varepsilon))}}{2}\\[2ex]\underline{u}_2^{\varepsilon}=\dfrac{-(a+m(\underline{v}_1+\varepsilon)-1)-\sqrt{(a+m(\underline{v}_1+\varepsilon)-1)^2+4(a+(m-k)(\underline{v}_1+\varepsilon))}}{2}\end{cases}$$

利用 $\bar{v}_1>\underline{v}_1$ 可知对 $\varepsilon>0$ 充分小，$\underline{u}_1^{\varepsilon}>0$，$\underline{u}_2^{\varepsilon}<0$. 类似于上面的证明可知

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leqslant\underline{u}_1^0=\underline{u}_2$$

其中

$$\bar{u}_2=\frac{-(a+m\underline{v}_1-1)+\sqrt{(a+m\underline{v}_1-1)^2+4(a+(m-k)\underline{v}_1)}}{2}$$

通过计算可知 $\bar{u}_2<\bar{u}_1$. 令

$$\varphi(s)=\frac{-(a-1+ms)+\sqrt{(a-1+ms)^2+4(a+(m-k)s)}}{2},\ \psi(s)=\frac{\delta}{\beta}(s+b),\ s>0$$

由 $(1+a)m\geqslant k$ 可知 ψ 严格单调增，φ 非增. 进一步，上面构造的常数 $\bar{u}_1,\bar{v}_1,\underline{u}_1,\underline{v}_1,\bar{u}_2$ 满足

$$\begin{cases}\underline{v}_1=\psi(\underline{u}_1)<\psi(\bar{u}_1)=\bar{v}_1,\ \underline{u}_1=\varphi(\bar{v}_1)\leqslant\varphi(\underline{v}_1)=\bar{u}_2<\bar{u}_1\\ \underline{u}_1\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min\limits_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max\limits_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leqslant\bar{u}_2<\bar{u}_1\\ \underline{v}_1\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leqslant\bar{v}_1\end{cases}\tag{2}$$

我们构造 4 个序列 $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{\infty},\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{\infty},\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{\infty},\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$：

$$\bar{v}_i=\psi(\bar{u}_i),\ \underline{u}_i=\varphi(\bar{v}_i),\ \underline{v}_i=\psi(\underline{u}_i),\ \bar{u}_{i+1}=\varphi(\underline{v}_i)\tag{3}$$

使得

$$\begin{cases}\underline{u}_i\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min\limits_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max\limits_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t)\leqslant\bar{u}_i\\ \underline{v}_i\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t)\leqslant\bar{v}_i\end{cases}\tag{4}$$

利用(2),(3) 式以及 φ 和 ψ 的单调性可知

$$\begin{cases}\underline{v}_i\leqslant\underline{v}_{i+1}=\psi(\underline{u}_{i+1})\leqslant\psi(\bar{u}_{i+1})=\bar{v}_{i+1}\leqslant\bar{v}_i\\ \underline{u}_i\leqslant\underline{u}_{i+1}=\varphi(\bar{v}_{i+1})\leqslant\varphi(\underline{v}_{i+1})=\bar{u}_{i+2}\leqslant\bar{u}_{i+1}\end{cases}$$

因此我们可以假设

$$\lim_{i\to\infty}\underline{u}_i=\underline{u},\ \lim_{i\to\infty}\underline{v}_i=\underline{v},\ \lim_{i\to\infty}\bar{u}_i=\bar{u},\ \lim_{i\to\infty}\bar{v}_i=\bar{v}\tag{5}$$

显然有 $0<\underline{u}\leqslant\bar{u}$，$0<\underline{v}\leqslant\bar{v}$ 并且 $\underline{u},\underline{v},\bar{u},\bar{v}$ 满足

$$\bar{u}=\varphi(\underline{v}),\ \bar{v}=\psi(\bar{u}),\ \underline{u}=\varphi(\bar{v}),\ \underline{v}=\psi(\underline{u})\tag{6}$$

经计算可知(6) 式等价于

$$\begin{cases}\overline{u}^2+(a-1)\overline{u}+m\overline{u}\underline{v}=(m-k)\underline{v}+a\\ \underline{u}^2+(a-1)\underline{u}+m\underline{u}\overline{v}=(m-k)\overline{v}+a\\ \overline{v}=\dfrac{\delta}{\beta}(\overline{u}+b),\ \underline{v}=\dfrac{\delta}{\beta}(\underline{u}+b)\end{cases}\tag{7}$$

利用(7)式的第3个和第4个方程可知

$$\beta(\overline{v}-\underline{v})=\delta(\overline{u}-\underline{u})\tag{8}$$

由(7)式的第1个和第2个方程可知

$$(\overline{u}+\underline{u})(\overline{u}-\underline{u})+(a-1)(\overline{u}-\underline{u})+m(\overline{u}\underline{v}-\underline{u}\overline{v})=(m-k)(\underline{v}-\overline{v})\tag{9}$$

因为

$$\overline{u}\underline{v}-\underline{u}\overline{v}=\frac{\delta}{\beta}(\overline{u}(\underline{u}+b)-\underline{u}(\overline{u}+b))=\frac{\delta b}{\beta}(\overline{u}-\underline{u}),\ \overline{v}-\underline{v}=\frac{\delta}{\beta}(\overline{u}-\underline{u})$$

由(9)式可知

$$(\overline{u}+\underline{u})(\overline{u}-\underline{u})+(a-1)(\overline{u}-\underline{u})+\frac{m\delta b}{\beta}(\overline{u}-\underline{u})-\frac{\delta}{\beta}(m-k)(\overline{u}-\underline{u})=0\tag{10}$$

下面利用反证法证明 $\overline{u}=\underline{u}$. 假设 $\overline{u}\neq\underline{u}$，显然有 $\overline{u}>\underline{u}$. 所以利用(10)式可知

$$\overline{u}+\underline{u}+a-1+\frac{m\delta b}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}(m-k)=0\tag{11}$$

将(7)式的前两个方程相加可得

$$\overline{u}^2+\underline{u}^2+(a-1)(\overline{u}+\underline{u})+m(\overline{u}\underline{v}+\underline{u}\overline{v})=(m-k)(\overline{v}+\underline{v})+2a\tag{12}$$

因为

$$\overline{u}\underline{v}+\underline{u}\overline{v}=\frac{\delta}{\beta}(\overline{u}(\underline{u}+b)+\underline{u}(\overline{u}+b))=\frac{2\delta}{\beta}\overline{u}\underline{u}+\frac{\delta b}{\beta}(\overline{u}+\underline{u}),\ \overline{v}+\underline{v}=\frac{\delta}{\beta}(\overline{u}+\underline{u})+\frac{2\delta b}{\beta}$$

由(12)式可知

$$\overline{u}^2+\underline{u}^2+\frac{2m\delta}{\beta}\overline{u}\underline{u}+\left(a-1+\frac{m\delta b}{\beta}-\frac{\delta}{\beta}(m-k)\right)(\overline{u}+\underline{u})=\frac{2\delta b}{\beta}(m-k)+2a\tag{13}$$

结合(11)式和(13)式得

$$(m\delta-\beta)\overline{u}\underline{u}=a\beta+m\delta b-k\delta b\tag{14}$$

现在可以从如下两个方面得到矛盾：

a) 如果 $m\delta\leqslant\beta$，由(14)式可知

$$a\beta+m\delta b-k\delta b\leqslant 0$$

这和假设

$$a\beta+m\delta b-k\delta b>0$$

矛盾；

b) 如果 $m\delta>\beta$，则由(14)式可知

$$a\beta+m\delta b-k\delta b<(m\delta-\beta)(\overline{u}_1)^2=m\delta-\beta$$

这和假设

$$a\beta+m\delta b\geqslant k\delta b+m\delta-\beta$$

矛盾.

综上知 $\overline{u}=\underline{u}$. 从而由(8)式可知 $\overline{v}=\underline{v}$. 结合该结果和(7)式可知 $\overline{u}=\underline{u}=u_*$，$\overline{v}=\underline{v}=v_*$. 最后由(4)式和(5)式可以得到$(u_*,v_*)$的全局渐近稳定性.

参考文献：

[1] YANG W S. Global Asymptotical Stability and Persistent Property for a Diffusive Predator-Prey System with Modified Leslie-Gower Functional Response [J]. Nonlinear Analysis：Real World Application，2013，14(3)：1323－1330.

[2] 郭改慧，李兵方，岳宗敏. 带交叉扩散的 Ivlev 捕食-食饵模型的分歧正解[J]. 西南大学学报：自然科学版，2013，35(1)：1－5.

[3] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社，1994.

[4] 谈骏渝. 一类扩散方程的初边值问题及其应用[J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(1)：11－14.

[5] WANG M X，PANG P Y H. Global Asymptotic Stability of Positive Steady States of a Diffusive Ratio-Dependent Prey-Predator Model [J]. Applied Mathematics Letters，2008，21(11)：1215－1220.

[6] HSU S B. Ordinary Differential Equations with Applications [M]. Singapore：World Scientific，1998.

Global Asymptotical Stability for a Diffusive Predator-Prey System with Modified Leslie-Gower Functional Response

ZHOU　Jun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper is devoted to generalize the global asymptotical stability result for a diffusive predator-prey system with modified Leslie-Gower functional response.

Key words：predator-prey system；modified Leslie-Gower functional response；global asymptotical stability

责任编辑　张　枸