第 36 卷第 7 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2014 年 7 月
Vol. 36　No. 7　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jul.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.010

抽象凸空间具有移动锥的广义向量均衡问题解的存在性①

杨明歌[1,2]，　常水珍[2]

1. 复旦大学 管理学院，上海 200433；2. 洛阳师范学院 数学科学学院，河南 洛阳 471022

摘要： 利用叠合点定理，在抽象凸空间中证明 4 种类型的具有移动锥的广义向量均衡问题解的存在性定理，所得结果改进和统一了相关文献中的结果.

关 键 词： $\mathscr{RC}$-映射；移动锥；广义向量均衡问题；抽象凸空间

中图分类号：O224　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2014)7-0058-05

令 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$，$A$ 是拓扑向量空间 E 的非空子集，$f: A\times A\longrightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x, x)\geqslant 0$，$\forall x\in A$. 文献[1]将标量均衡问题描述为：存在 $x_0\in A$ 使得 $f(x_0, y)\geqslant 0$，$\forall y\in A$. 许多基本的数学问题都是均衡问题的特例，例如优化问题、Nash 均衡问题、不动点、补问题、变分不等式等. 近二十年来，人们更加关注向量均衡问题，具有移动锥的向量均衡问题已经被广泛研究[2-6].

最近，利用叠合点定理，文献[2]在拓扑向量空间中证明了具有移动锥的广义向量均衡问题解的存在性定理. 利用 Fan-Browder 不动点定理的推广形式，文献[3]进一步在 G-凸空间中证明了具有移动锥的广义向量均衡问题解的存在性定理. 文献[4]在抽象凸空间中讨论关于紧 $\mathscr{RC}$-映射的叠合点定理和极大元定理. 文献[5]进一步在抽象凸空间中讨论关于非紧 $\mathscr{RC}$-映射的叠合点定理及其应用. 注意到拓扑向量空间的凸子集和 G-凸空间为抽象凸空间特例，故考虑能否利用上述叠合点定理，在抽象凸空间中证明具有移动锥的广义向量均衡问题解的存在性，以统一和改进文献[2-3]中的相关结果.

设 X 是拓扑空间，Z 是非空集合，V 是拓扑向量空间，$F: X\times Z\multimap V$ 和 $C: X\multimap V$ 是集值映射. 考虑以下 4 种类型的广义向量均衡问题：

1) 存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0, z)\subset C(x_0)$ 对所有的 $z\in Z$ 成立；

2) 存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0, z)\cap(-\operatorname{int} C(x_0))=\varnothing$ 对所有的 $z\in Z$ 成立；

3) 存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0, z)\cap C(x_0)\neq\varnothing$ 对所有的 $z\in Z$ 成立；

4) 存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0, z)\not\subset -\operatorname{int} C(x_0)$ 对所有的 $z\in Z$ 成立.

本文利用抽象凸空间中关于非紧 $\mathscr{RC}$-映射的叠合点定理，在适当的条件下给出广义向量均衡问题 1)-4) 解的存在性定理，所得结果改进和统一了文献[2-3]中的相关结果.

引理 1[6]　设 X 是拓扑空间，Z 是非空集合，$P: X\multimap Z$ 是集值映射. 则下述结论等价：

(i) P^- 是转移开值的且 P 具有非空值；

(ii) $X=\bigcup_{z\in Z}\operatorname{int}P^-(z)$.

---

① 收稿日期：2013-10-09

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11226228)；中国博士后科学基金资助项目(2014M551312).

作者简介：杨明歌(1982-)，女，河南洛阳人，副教授，主要从事优化理论及应用的研究.

引理 2[5]　设 X 是拓扑空间，$(Y;\Gamma)$ 是抽象凸拓扑空间，Z 是非空集合，$P: X \multimap Z$，$Q: Y \multimap Z$，$T: Y \multimap X$ 满足：

(i) $X = \bigcup_{z \in Q(Y)} \mathrm{int} P^{-}(z)$；

(ii) 对任意的 $x \in X$，$\{y \in Y: P(x) \cap Q(y) \neq \varnothing\}$ 是 Γ-凸的；

(iii) $T \in \mathscr{RC}(Y, X)$；

(iv) 对 Y 的任意紧子集 A，$\overline{T(A)}$ 是紧的；

(v) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N \in \langle Y \rangle$，存在 Y 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$T(L_N) \backslash D \subset \bigcup_{y \in L_N} \mathrm{int}\{x \in X: P(x) \cap Q(y) \neq \varnothing\}$$

则存在 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ 使得 $x_0 \in T(y_0)$ 且 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \varnothing$.

定理 1　设 X, V 是拓扑空间，$(Y;\Gamma)$ 是抽象凸拓扑空间，Z 是非空集合，$F: X \times Z \multimap V$，$C: X \multimap V$，$Q: Y \multimap Z$，$T: Y \multimap X$ 满足：

(i) $Q(Y) = Z$；

(ii) 对任意的 $x \in X$，若 $\{z \in Z: F(x, z) \not\subset C(x)\} \neq \varnothing$，则存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z' \in Z$ 使得 $F(x', z') \not\subset C(x')$ 对所有的 $x' \in N(x)$ 成立；

(iii) 对任意的 $x \in X$，集合 $\{y \in Y$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)\}$ 是 Γ-凸的；

(iv) 对任意的 $y \in Y$，$x \in T(y)$ 和 $z \in Q(y)$，有 $F(x, z) \subset C(x)$；

(v) $T \in \mathscr{RC}(Y, X)$；

(vi) 对 Y 的任意紧子集 A，$\overline{T(A)}$ 是紧的；

(vii) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N \in \langle Y \rangle$，存在 Y 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$T(L_N) \backslash D \subset \bigcup_{y \in L_N} \mathrm{int}\{x \in X: \text{存在 } z \in Q(y) \text{ 使得 } F(x, z) \not\subset C(x)\}$$

则存在 $x_0 \in X$ 使得 $F(x_0, z) \subset C(x_0)$ 对任意的 $z \in Z$ 成立.

证　定义 $P: X \multimap Z$ 为

$$P(x) = \{z \in Z: F(x, z) \not\subset C(x)\} \qquad \forall x \in X$$

假设定理 1 的结论不成立，则任意的 $x \in X$，存在 $z \in Z$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)$. 即任意的 $x \in X$，$P(x) \neq \varnothing$.

条件 (ii) 等价于 P^{-} 是转移开值的. 事实上，由条件 (ii) 和 P 的定义可知，任意的 $x \in X$，$P(x) \neq \varnothing$ 意味着存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z' \in Z$ 使得 $z' \in P(x')$ 对所有的 $x' \in N(x)$ 成立. 从而，对任意的 $x \in X$ 和 $z \in P(x)$，存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z' \in Z$ 使得 $N(x) \subset P^{-}(z')$，故 P^{-} 是转移开值的. 由引理 1 和条件 (i)，得

$$X = \bigcup_{z \in Z} \mathrm{int} P^{-}(z) = \bigcup_{z \in Q(Y)} \mathrm{int} P^{-}(z)$$

即引理 2 的条件 (i) 满足. 由定理 1 中条件 (iii) 和 (v)－(vii)，易知引理 2 的条件 (ii)－(v) 满足. 由引理 2，存在 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ 使得 $x_0 \in T(y_0)$ 且 $P(x_0) \cap Q(y_0) \neq \varnothing$，即存在 $z_0 \in Q(y_0)$ 使得 $F(x_0, z_0) \not\subset C(x_0)$，这与条件 (vi) 矛盾，定理 1 的结论成立.

注 1　1) 如果 T 是紧的或 X 是紧的，则条件 (vi) 和 (vii) 多余；

2) 定理 1 的条件 (ii) 可换为“任意的 $z \in Z$，$x \multimap F(x, z)$ 下半连续且 C 是闭的”. 事实上，此时可以证明：任意的 $z \in Z$，$P^{-}(z)$ 是开集，从而 P^{-} 是转移开值的.

推论 1　设 X, V 是拓扑空间，$(Y;\Gamma)$ 是抽象凸空间，Z 是非空集合，$F: X \times Z \multimap V$，$C: X \multimap V$，$Q: Y \multimap Z$，$T: Y \multimap X$ 满足：

(i) $Q(Y) = Z$；

(ii) 对任意的 $z \in Z$，$x \multimap F(x, z)$ 下半连续，且 C 是闭的；

(iii) 对任意的 $x \in X$，集合 $\{y \in Y$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)\}$ 是 Γ-凸的；

(iv) 对任意的 $y \in Y$，$x \in T(y)$ 和 $z \in Q(y)$，有 $F(x, z) \subset C(x)$；

(ⅴ) $T \in \mathscr{RC}(Y, X)$ 是紧的.

则存在 $x_0 \in X$ 使得 $F(x_0, z) \subset C(x_0)$ 对任意的 $z \in Z$ 成立.

注 2　在推论 1 中，进一步假设 X 和 Y 是拓扑向量空间的凸子集，Z 是向量空间的凸子集，V 是拓扑向量空间，则条件(ⅲ)可换为"(a) 任意的 $x \in X$，$C(x)$ 是非空凸锥；(b) Q 是拟凸的，且任意的 $x \in X$，$z \multimap F(x, z)$ 是 $C(x)$－拟凸的."事实上，任意的 $x \in X$，条件(a) 和(b) 意味着集合$\{y \in Y$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)\}$ 是凸的(见文献[2] 定理 11 的证明). 因此，文献[2] 定理 11 为推论 1 特例.

推论 2　设$(X; \Gamma)$是抽象凸拓扑空间，$1_X \in \mathscr{RC}(X, X)$，$Z$ 是非空集合，V 是拓扑空间，F：$X \times Z \multimap V$，C：$X \multimap V$，Q：$X \multimap Z$ 满足：

(ⅰ) $Q(X) = Z$；

(ⅱ) 对任意的 $z \in Z$，$x \multimap F(x, z)$ 下半连续，且 C 是闭的；

(ⅲ) 对任意的 $x \in X$，集合$\{y \in X$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)\}$ 是 Γ-凸的；

(ⅳ) 对任意的 $x \in X$ 和 $z \in Q(x)$，有 $F(x, z) \subset C(x)$；

(ⅴ) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N \in \langle X \rangle$，存在 X 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$L_N \backslash D \subset \bigcup_{y \in L_N} \operatorname{int}\{x \in X\text{：存在 } z \in Q(y) \text{ 使得 } F(x, z) \not\subset C(x)\}$$

则存在 $x_0 \in X$ 使得 $F(x_0, z) \subset C(x_0)$ 对任意的 $z \in Z$ 成立.

注 3　在推论 2 中，进一步假设 X 和 Z 是拓扑向量空间的凸子集，V 是拓扑向量空间，则条件(ⅲ)可换为"(a) 任意的 $x \in X$，$C(x)$ 是非空凸锥；(b) Q 是弱凸的，且任意的 $x \in X$，$z \multimap F(x, z)$ 是 $C(x)$－拟凸的". 事实上，任意的 $x \in X$，条件(a) 和(b) 意味着集合$\{y \in Y$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \not\subset C(x)\}$ 是凸的(见文献[3] 定理 8 的证明). 因此，文献[3] 定理 8 为推论 2 特例.

定理 2　设 X 是拓扑空间，$(Y; \Gamma)$ 是抽象凸拓扑空间，Z 是非空集合，V 是拓扑向量空间，F：$X \times Z \multimap V$，C：$X \multimap V$，Q：$Y \multimap Z$，T：$Y \multimap X$ 满足：

(ⅰ) $Q(Y) = Z$；

(ⅱ) 对任意的 $x \in X$，若$\{z \in Z$：$F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) \neq \varnothing\} \neq \varnothing$，则存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z' \in Z$ 使得 $F(x', z') \cap (-\operatorname{int} C(x')) \neq \varnothing$ 对所有的 $x' \in N(x)$ 成立；

(ⅲ) 对任意的 $x \in X$，集合$\{y \in Y$：存在 $z \in Q(y)$ 使得 $F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) \neq \varnothing\}$ 是 Γ-凸的；

(ⅳ) 对任意的 $y \in Y$，$x \in T(y)$ 和 $z \in Q(y)$，有 $F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) = \varnothing$；

(ⅴ) $T \in \mathscr{RC}(Y, X)$；

(ⅵ) 对 Y 的任意紧子集 A，$\overline{T(A)}$ 是紧的；

(ⅶ) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N \in \langle Y \rangle$，存在 Y 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$T(L_N) \backslash D \subset \bigcup_{y \in L_N} \operatorname{int}\{x \in X\text{：存在 } z \in Q(y) \text{ 使得 } F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) \neq \varnothing\}$$

则存在 $x_0 \in X$ 使得 $F(x_0, z) \cap (-\operatorname{int} C(x_0)) = \varnothing$ 对任意的 $z \in Z$ 成立.

证　定义 P：$X \multimap Z$ 如下：

$$P(x) = \{z \in Z\text{：} F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) \neq \varnothing\} \qquad \forall x \in X$$

假设定理 2 的结论不成立，则对任意的 $x \in X$，存在 $z \in Z$ 使得 $F(x, z) \cap (-\operatorname{int} C(x)) \neq \varnothing$. 即任意的 $x \in X$，$P(x) \neq \varnothing$. 类似定理 1，可以证明定理 2 的结论成立.

注 4　1) 如果 T 是紧的或 X 是紧的，则条件(ⅵ) 和(ⅶ) 多余.

2) 定理 2 的条件(ⅱ)可换为"任意的 $z \in Z$，$x \multimap F(x, z)$ 下半连续；任意的 $x \in X$，$C(x)$ 具有非空内部，且 W：$X \multimap V$ 是闭的，其中 $W(x)$：$= V \backslash (-\operatorname{int} C(x))$". 事实上，此时可以证明：对任意的 $z \in Z$，$P^-(z)$ 是开集，从而 P^- 是转移开值的.

3) 与定理 1 类似，从定理 2 出发，也可得到相应的推论，且文献[2] 定理 12 和文献[3] 定理 9 为定理 2 的特例.

定理 3　设 X，V 是拓扑空间，$(Y; \Gamma)$ 是抽象凸拓扑空间，Z 是非空集合，F：$X \times Z \multimap V$，C：$X \multimap$

V，Q：Y—∘ Z，T：Y—∘ X 满足：

(i) $Q(Y)=Z$；

(ii) 对任意的 $x\in X$，若$\{z\in Z: F(x,z)\cap C(x)=\emptyset\}\neq\emptyset$，则存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z'\in Z$ 使得 $F(x',z')\cap C(x')=\emptyset$ 对所有的 $x'\in N(x)$ 成立；

(iii) 对任意的 $x\in X$，集合$\{y\in Y$：存在 $z\in Q(y)$ 使得 $F(x,z)\cap C(x)=\emptyset\}$ 是 Γ-凸的；

(iv) 对任意的 $y\in Y$，$x\in T(y)$ 和 $z\in Q(y)$，有 $F(x,z)\cap C(x)\neq\emptyset$；

(v) $T\in\mathscr{RC}(Y,X)$；

(vi) 对 Y 的任意紧子集 A，$\overline{T(A)}$ 是紧的；

(vii) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N\in\langle Y\rangle$，存在 Y 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$T(L_N)\backslash D\subset\bigcup_{y\in L_N}\operatorname{int}\{x\in X:\text{存在 } z\in Q(y)\text{ 使得 } F(x,z)\cap C(x)=\emptyset\}$$

则存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0,z)\cap C(x_0)\neq\emptyset$ 对任意的 $z\in Z$ 成立.

证 定义 P：X—∘ Z 如下：

$$P(x)=\{z\in Z: F(x,z)\cap C(x)=\emptyset\}\qquad\forall x\in X$$

假设定理 3 的结论不成立，则对任意的 $x\in X$，存在 $z\in Z$ 使得 $F(x,z)\cap C(x)=\emptyset$. 即任意的 $x\in X$，$P(x)\neq\emptyset$. 类似定理 1，可以证明定理 3 的结论成立.

注 5 1) 如果 T 是紧的或 X 是紧的，则条件 (vi) 和 (vii) 多余.

2) 定理 3 的条件 (ii) 可换为“F 上半连续具有紧值，且 C 是闭的”. 事实上，此时可以证明：任意的 $z\in Z$，$P^-(z)$ 是开集，从而 P^- 是转移开值的.

3) 与定理 1 类似，从定理 3 出发，也可得到相应的推论，且可以证明文献[2]定理 13 和文献[3]定理 10 为定理 3 特例.

定理 4 设 X 是拓扑空间，$(Y;\Gamma)$ 是抽象凸拓扑空间，Z 是非空集合，V 是拓扑向量空间，F：$X\times Z$—∘ V，C：X—∘ V，Q：Y—∘ Z，T：Y—∘ X 满足：

(i) $Q(Y)=Z$；

(ii) 对任意的 $x\in X$，若$\{z\in Z: F(x,z)\subset -\operatorname{int}C(x)\}\neq\emptyset$，则存在 x 的开邻域 $N(x)$ 和 $z'\in Z$ 使得 $F(x',z')\subset -\operatorname{int}C(x')$ 对所有的 $x'\in N(x)$ 成立；

(iii) 对任意的 $x\in X$，集合$\{y\in Y$：存在 $z\in Q(y)$ 使得 $F(x,z)\subset -\operatorname{int}C(x)\}$ 是 Γ-凸的；

(iv) 对任意的 $y\in Y$，$x\in T(y)$ 和 $z\in Q(y)$，有 $F(x,z)\not\subset -\operatorname{int}C(x)$；

(v) $T\in\mathscr{RC}(Y,X)$；

(vi) 对 Y 的任意紧子集 A，$\overline{T(A)}$ 是紧的；

(vii) 存在 X 的非空紧子集 D 使得对任意的 $N\in\langle Y\rangle$，存在 Y 的包含 N 的紧 Γ-凸子集 L_N 满足

$$T(L_N)\backslash D\subset\bigcup_{y\in L_N}\operatorname{int}\{x\in X:\text{存在 } z\in Q(y)\text{ 使得 } F(x,z)\subset -\operatorname{int}C(x)\}$$

则存在 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0,z)\not\subset -\operatorname{int}C(x_0)$ 对任意的 $z\in Z$ 成立.

证 定义 P：X—∘ Z 如下：

$$P(x)=\{z\in Z: F(x,z)\subset -\operatorname{int}C(x)\}\qquad\forall x\in X$$

假设定理 4 的结论不成立，则对任意的 $x\in X$，存在 $z\in Z$ 使得 $F(x,z)\subset -\operatorname{int}C(x)$. 即任意的 $x\in X$，$P(x)\neq\emptyset$. 类似定理 1，可以证明定理 4 的结论成立.

注 6 1) 如果 T 是紧的或 X 是紧的，则条件 (vi) 和 (vii) 多余.

2) 定理 4 的条件 (ii) 可换为“F 上半连续具有紧值；对任意的 $x\in X$，$C(x)$ 具有非空内部，且 W：X—∘ V 是闭的，其中 $W(x):=V\backslash(-\operatorname{int}C(x))$”. 事实上，此时可以证明：任意的 $z\in Z$，$P^-(z)$ 是开集，从而 P^- 是转移开值的.

3) 与定理 1 类似，从定理 4 出发，也可得到相应的推论，且文献[2]定理 14 和文献[3]定理 11 为定理 4 特例.

参考文献：

[1] BLUM E，OETTLI W. From Optimization and Variational Inequalities Problems to Equilibrium Problems [J]. Mathematics Student-India，1994，63(1)：123—145.

[2] BALAJ M. Coincidence and Maximal Element Theorems and Their Applications to Generalized Equilibrium Problems and Minimax Inequalities [J]. Nonlinear Anal TMA，2008，68(12)：3962—3971.

[3] BALAJ M，LIN L. Fixed Points，Coincidence Points and Maximal Elements with Applications to Generalized Equilibrium Problems and Minimax Theory [J]. Nonlinear Anal TMA，2009，70(1)：393—403.

[4] YANG M，HUANG N，LI C. Coincidence and Maximal Element Theorems in Abstract Convex Spaces with Applications [J]. Taiwanese Journal of Mathematics，2011，15(1)：13—29.

[5] YANG M，HUANG N. Coincidence Theorems for Noncompact $\mathscr{RC}$-Maps in Abstract Convex Spaces with Applications [J]. Bull Korean Math Soc，2012，49(6)：1147—1161.

[6] LIN L，HSU H. Existence Theorems of Systems of Vector Quasi-Equilibrium Problems and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints [J]. J Glob Optim，2007，37(2)：195—213.

Existence of Solutions for Generalized Vector Equilibrium Problems with Moving Cones in Abstract Convex Spaces

YANG Ming-ge[1,2]，　CHANG Shui-zhen[2]

1. School of Management，Fudan University，Shanghai 200433，China；

2. College of Mathematics Science，Luoyang Normal University，Luoyang Henan 471022，China

Abstract：Using the coincidence theorem，we prove the existence theorems of solutions for four types of generalized vector equilibrium problems with moving cones in abstract convex spaces. The results presented in this paper improve and unify some corresponding results in the literature.

Key words：RC-map；moving cone；generalized vector equilibrium problem；abstract convex space

责任编辑　张　枸