DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.011

三阶中立型微分方程的振动准则[①]

汪皎月[1], 于淑惠[2,3]

1. 凯里学院 数学科学学院,贵州 凯里 556600;
2. 西南大学 图书馆,重庆 400715;3. 重庆大学 生命科学学院,重庆 400030

摘要: 研究一类三阶中立型微分方程

$$[a(t)(y''(t))^{\gamma}]' + f(t, x(t), x(\sigma(t)), x'(t), x'(\sigma(t)), x''(t), x''(\sigma(t))) = 0 \qquad t \geqslant t_0$$

的振动性,其中

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(\tau_i(t))$$

给出了该类方程振动的充分条件,丰富了已有结果.

关 键 词: Riccati 变换;中立型微分方程;振动性

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2014)7-0063-05

近些年来,有关中立型时滞微分方程的振动性研究比较多[1-7],但是关于三阶中立型时滞微分方程的振动性研究却比较少.文献[1]研究方程

$$(r(t)(x(t) + p(t)x(\sigma(t)))'')' + q(t)f(x(t), x(g(t)))h(x'(t)) = 0 \qquad t \geqslant t_0$$

的振动性,在 5 个假设条件下给出该方程的振动准则.文献[2]研究方程

$$(r(t)(x(t) + p(t)x(\tau(t)))'')' + q(t)f(x(\sigma(t)))g(x'(t)) = 0 \qquad t \geqslant t_0$$

的振动性,在 5 个假设条件下,运用 Riccati 变换给出 3 个不同该方程振动的充分条件.文献[3]研究方程

$$(r(t)((x(t) + p(t)x[\tau(t)])'')^{\alpha})' + F(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(g(t))) = 0 \qquad t \geqslant t_0$$

在 6 个假设条件和 5 个引理下,运用 Riccati 变换给出了 3 个该方程的振动准则和 3 个推论.

文献[1-7]研究的方程均为带单时滞变量的中立型微分方程,而对于带多时滞变量的中立型微分方程的研究结果比较少.本文将研究一类三阶带多时滞变量的中立型时滞微分方程

$$(a(t)(y''(t))^{\gamma})' + f(t, x(t), x(\sigma(t)), x'(t), x'(\sigma(t)), x''(t), x''(\sigma(t))) = 0 \qquad t \geqslant t_0 \tag{1}$$

的振动性,其中

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(\tau_i(t))$$

很显然,方程(1)是文献[1-2]中方程的推广.本文运用 Riccati 变换和分析知识化简了多元函数,克服了多时滞变量给问题带来的复杂性,给出了方程(1)振动的充分条件,丰富了已有结果.

---

① 收稿日期:2013-06-22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(81102894);贵州省专业综合改革试点建设项目(黔教高发[2012]426 号);贵州凯里学院基础数学重点学科建设项目(KZD2009001).
作者简介:汪皎月(1972-),女,江苏金坛人,副教授,主要从事微分方程的研究.

假设条件：γ 是两正奇数比；$I=[t_0,\infty)$，$a\in C^1(I,\mathbb{R}_+)$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\mathrm{d}t=\infty$，$p_i\in C^1(I,\mathbb{R})$，$\tau_i\in C^1(I,\mathbb{R}_+)$，$t\geqslant\tau_i(t)$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tau_i(t)=\infty$，$i\in\mathbb{N}_+$；$f\in C(I\times\mathbb{R}^6,\mathbb{R}_+)$，$f(t,u,v,w,x,y,z)\geqslant f_0(t)f_1(u)f_2(v,w,x,y,z)$，$f_0\in(I,\mathbb{R}_+)$，$\frac{f_1(u)}{u^\gamma}\geqslant K_1$，$f_2(v,w,x,y,z)\geqslant K_2$.

基本假设：

(A1) $p_i(t)\geqslant 0$，$i\in\mathbb{N}_+$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(t)<1$；

(A2) 存在常数 p_0 和数列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $-1<p_0\leqslant p_i(t)\leqslant 0$，$\tau_1(a_{k+1})=a_k$，$i\in\mathbb{N}_+$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\infty$，$np_0>-1$.

方程(1) 的解 x 是振动的，如果 x 既不是最终为正，也不是最终为负，否则称为非振动的. 方程(1) 是振动的，如果它的所有解是振动的.

为了证明主要结果，需要以下引理.

引理 1 假设 $x(t)$ 是方程(1) 的最终正解，则 $y(t)$ 只具有两种性质之一，即对某个 t_1，当 $t\geqslant t_1$ 时，有

(i) $y(t)>0$，$y'(t)<0$，$y''(t)>0$；

(ii) $y(t)>0$，$y'(t)>0$，$y''(t)>0$.

引理 2 假设 $x(t)$ 是方程(1) 的最终正解，且 $y(t)$ 具有性质 (i)，如果

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_{u}^{\infty}f_1(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\infty \tag{2}$$

则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

引理 1,2 的证明与文献[4] 中引理 1,2 的证明过程类似，故省略.

引理 3 设 $u(t)>0$，$u'(t)>0$，$u''(t)>0$，$u'''(t)\leqslant 0$，$t\geqslant t_1$，则存在 $\beta\in(0,1)$ 和 $T_\beta\geqslant t_0$，使得 $\frac{u(t)}{u'(t)}\geqslant\frac{t-t_1}{2}$.

引理 3 的证明类似参考文献[5] 中引理 4 的证明，故省略.

引理 4 假设 $A>0$，$B>0$，$\alpha>0$. 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$，都有

$$Bx-Ax^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\leqslant\frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{B^{\alpha+1}}{A^\alpha} \tag{3}$$

定理 1 (A1)，(2) 式成立，若对于任意的 $T\geqslant t_0$，且存在 $\rho,\varphi\in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}_+)$，有

$$\int_{T}^{\infty}\{\rho(t)K_1K_2f_0(t)(1-\sum_{i=1}^{n}p_i(t))^\gamma\frac{(t-t_1)^\gamma}{2^\gamma}-\rho(t)\varphi'(t)+\frac{\varphi(t)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)-$$

$$\frac{\rho(t)a(t)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\}\mathrm{d}t=\infty \tag{4}$$

则方程(1) 振动或者$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

证 设 x 是方程(1) 的一个非振动解，不失一般性，假设 x 最终为正解. 由引理 1 知 $y(t)$ 只具备两种性质 (i),(ii) 之一.

若 $y(t)$ 具备性质 (i)，且(2) 式成立，由引理 2 得$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

若 $y(t)$ 具备性质 (ii)，定义函数 ω：

$$\omega(t)=\rho(t)\left\{\frac{a(t)(y''(t))^\gamma}{(y'(t))^\gamma}+\varphi(t)\right\} \tag{5}$$

对 ω 求导，由(1),(4) 和(5) 式得到

$$\omega'(t)=\rho'(t)\left\{\frac{a(t)(y''(t))^{\gamma}}{(y'(t))^{\gamma}}+\varphi(t)\right\}+\rho(t)\varphi'(t)+\rho(t)\left(\frac{(a(t)(y''(t))^{\gamma})'}{(y'(t))^{\gamma}}-\gamma a(t)\frac{(y''(t))^{\gamma+1}}{(y'(t))^{\gamma+1}}\right)=$$

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\omega(t)+\varphi(t)\left[\frac{-f(t,x(t),x'(t),x''(t))}{(y'(t))^{\gamma}}+\varphi'(t)-\gamma a(t)\left(\frac{\omega(t)-\rho(t)\varphi(t)}{\rho(t)a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1}\right]\leqslant$$

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\omega(t)+\rho(t)\left[\frac{-f_0(t)K_1K_2(x(t))^{\gamma}}{(y'(t))^{\gamma}}+\varphi'(t)\right]-\gamma\frac{(\omega(t)-\rho(t)\varphi(t))^{\frac{1}{\gamma}+1}}{(\rho(t)a(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\tag{6}$$

运用不等式(参看文献[7] 中(2.17))

$$(u-v)^{1+\frac{1}{\gamma}}\geqslant u^{1+\frac{1}{\gamma}}+\frac{1}{\gamma}v^{1+\frac{1}{\gamma}}-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)uv^{\frac{1}{\gamma}}$$

得到

$$(\omega(t)-\rho(t)\varphi(t))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\geqslant\omega^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)+\frac{1}{\gamma}(\rho(t)\varphi(t))^{1+\frac{1}{\gamma}}-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\omega(t)(\rho(t)\varphi(t))^{\frac{1}{\gamma}}\tag{7}$$

由(6) 和(7) 式得到

$$\rho(t)K_1K_2f_0(t)\frac{x^{\gamma}(t)}{y^{\gamma}(t)}\frac{y^{\gamma}(t)}{(y'(t))^{\gamma}}-\rho(t)\varphi'(t)+\frac{\rho(t)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)\leqslant$$

$$\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]\omega(t)-\frac{\gamma}{(\rho(t)a(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\omega^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)-\omega'(t)\tag{8}$$

由 $\sum_{i=1}^{n}p_i(t)<1$ 可知，

$$y(t)=x(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x(\tau_i(t))\geqslant x(t)$$

则

$$y(t)\geqslant y(\tau_i(t))\geqslant x(\tau_i(t))\qquad i\in\mathbb{N}_+$$

所以有

$$y(t)=x(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)x(\tau_i(t))\leqslant x(t)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)y(t)$$

即

$$y(t)(1-\sum_{i=1}^{n}p_i(t))\leqslant x(t)\tag{9}$$

由引理 3，取 $u(t)=y(t)$，有

$$\frac{y(t)}{y'(t)}\geqslant\frac{t-t_1}{2}\tag{10}$$

由(8),(9) 和(10) 式得，

$$\rho(t)K_1K_2f_0(t)(1-\sum_{i=1}^{n}p_i(t))^{\gamma}\frac{(t-t_1)^{\gamma}}{2^{\gamma}}-\rho(t)\varphi'(t)+\frac{\rho(t)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)-$$

$$\frac{\rho(t)a(t)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\leqslant-\omega'(t)\tag{11}$$

在(11) 式中用 s 替换 t，在不等号两边对 s 从 T 到 t 积分得到

$$\int_T^t\Bigg\{\rho(s)K_1K_2f_0(s)(1-\sum_{i=1}^{n}p_i(s))^{\gamma}\frac{(s-t_1)^{\gamma}}{2^{\gamma}}-\rho(s)\varphi'(s)+\frac{\rho(s)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(s)-$$

$$\frac{\rho(s)a(s)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\Bigg\}\mathrm{d}s\leqslant\omega(T)-\omega(t)\leqslant\omega(T)\tag{12}$$

易知与(4)式矛盾．证毕．

取 $\rho(t)=1$，$\varphi(t)=0$，得到如下推论1．

推论1 (A1)，(2)式成立，若对于任意的 $T\geqslant t_0$，有

$$\int_T^{\infty} f_0(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right)^{\gamma}(t-t_1)^{\gamma}\mathrm{d}t=\infty \tag{13}$$

则方程(1)振动或者 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$．

定理2 (A2)，(2)式成立，若对于任意的 $T\geqslant t_0$，且存在 $\rho,\varphi\in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}_+)$，有

$$\int_T^{\infty}\left\{\rho(t)K_1K_2f_0(t)\frac{(t-t_1)^{\gamma}}{2^{\gamma}}-\rho(t)\varphi'(t)+\frac{\rho(t)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)-\frac{\rho(t)a(t)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\right\}\mathrm{d}t=\infty \tag{14}$$

则方程(1)振动或者 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$．

证 设 x 是方程(1)的一个非振动解，不失一般性，假设 x 最终为正解．由引理1得到 $y(t)$ 只具备两种性质(i),(ii)之一．

若 $y(t)$ 具备性质(i)，且(2)式成立，由引理2得 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$．

若 $y(t)$ 具备性质(ii)，定义函数(5)，由定理1的证明可得(8)式成立，由 $p_i(t)\leqslant 0$，$i\in\mathbb{N}_+$，得到 $y(t)\leqslant x(t)$，又由(10)式成立得

$$\rho(t)K_1K_2f_0(t)\frac{(t-t_1)^{\gamma}}{2^{\gamma}}-\rho(t)\varphi'(t)+\frac{\rho(t)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(t)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(t)-\frac{\rho(t)a(t)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\leqslant-\omega'(t) \tag{15}$$

与定理1的证明类似可得

$$\int_T^{t}\left\{\rho(s)K_1K_2f_0(s)\frac{(s-t_1)^{\gamma}}{2^{\gamma}}-\rho(s)\varphi'(s)+\frac{\rho(s)}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\varphi^{1+\frac{1}{\gamma}}(s)-\frac{\rho(s)a(s)}{(1+\gamma)^{1+\gamma}}\left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+(1+\gamma)\left(\frac{\varphi(s)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{1+\gamma}\right\}\mathrm{d}s\leqslant\omega(T) \tag{16}$$

易知与(14)式矛盾．证毕．

取 $\rho(t)=1$，$\varphi(t)=0$ 得到如下推论2．

推论2 (A2)，(2)式成立，若对于任意的 $T\geqslant t_0$，有

$$\int_T^{\infty} f_0(t)(t-t_1)^{\gamma}\mathrm{d}t=\infty \tag{17}$$

则方程(1)振动或者 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$．

参考文献：

[1] 屈 英，孙 博．三阶非线性中立型微分方程的振动性[J]．数学的实践与认识，2011，41(6)：244－248．

[2] 韩忠月．三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性[J]．华东师范大学学报：自然科学版，2012(1)：113－120．

[3] 罗李平，俞元洪．三阶半线性中立型微分方程的振动结果[J]．系统科学与数学，2012，32(5)：571－579．

[4] 胡迎春，白玉真．一类三阶非线性中立型时滞微分方程的振动性判定准则[J]．曲阜师范大学学报：自然科学版，2012，38(2)：17－23．

[5] BACULÍKOVÁ B，DURINA J．Oscillation of Third-Order Neutral Differential Equations[J]．Math Comput Modelling，2010，52(1)：215－226．

[6] TAHER S HASSAN. Oscillation of Third Order Nonlinear Delay Dynamic Equations on Time Scales [J]. Math Comput Modelling，2009，49(7－8)：1573－1586.

[7] GRACE S R，AGARWAL R P，AKTAS M F. On the Oscillation of Third Order Functional Differential Equations [J]. Indian J Pure Appl Math，2008(39)：491－507.

Oscillation Criteria for Third-Order Neutral Differential Equations

WANG Jiao-yue[1]，　YU Shu-hui[2,3]

1. School of Mathematical Sciences，Kaili University，Kaili Guizhou 556600，China；
2. Southwest University Library，Chongqing 400715，China；
3. School of Life Science，Chongqing University，Chongqing 400030，China

Abstract：The oscillation of a third-order neutral delay differential equation

$$[a(t)(y''(t))^{\gamma}]' + f(t, x(t), x(\sigma(t)), x'(t), x'(\sigma(t)), x''(t), x''(\sigma(t))) = 0 \qquad t \geqslant t_0$$

where

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) x(\tau_i(t))$$

is studied and some sufficient conditions for oscillation for the equation are obtained.

Key words：Riccati transformation；neutral differential equation；oscillation

责任编辑　张　枸