第 36 卷第 7 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2014 年 7 月
Vol. 36　No. 7　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jul.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.012

二维椭圆问题的经济外推瀑布多重网格法①

李　明，　赵金娥

红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199

摘要：针对二维椭圆问题，首先提出九点紧致中心差分(NCCD)格式，并讨论该格式的截断误差. 接着，提出了基于 NCCD 格式下的经济外推瀑布多重网格(EEXCMG)法，其中使用新外推公式和三次多项式插值算子给相邻细网格层提供初始值，并在各网格层上采用经济的磨光策略. 数值实验验证了 NCCD 格式的四阶精度和 EEXCMG 法的有效性.

关　键　词：紧致中心差分格式；新外推公式；经济的磨光策略；经济外推瀑布多重网格法

中图分类号：O241.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2014)7－0068－05

多重网格(MG)法能有效求解有限差分法(或有限元法)离散偏微分方程(PDE)形成的离散化方程组. 其中瀑布型多重网格(CMG)法算法结构简单、计算效率高，成为 MG 法研究领域的热点之一. CMG 法起源于上世纪 90 年初[1]. 文献[2]的数值实验表明 CMG 法非常有效. 文献[3－5]对 CMG 法进行了理论分析. 文献[6]给出了经济的磨光策略，以降低粗网格层上的磨光步数，设计了经济瀑布型多重网格(ECMG)法. 文献[7－9]改进传统外推公式，提出了新外推公式和新外推瀑布型多重网格(EXCMG)法，并进行了理论分析.

本文考虑如下二维椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\alpha \geqslant 0$ 为已知系数，f 为已知连续可微函数，Ω 为二维凸多边形区域，u 为足够光滑的待求函数. 为了进一步丰富问题(1) 的离散格式及其数值解法，我们结合文献[10] 的思想，提出了一种九点紧致中心差分(NCCD) 格式，并证明其截断误差为 $O(h^4)$. 接着，将文献[6] 中的经济的磨光策略与文献[7－9] 中提出的新外推公式相结合，提出了经济外推多重网格(EEXCMG) 法. 其中，新外推公式和三次多项式插值算子用于将粗层上的解插值到相邻细网格层上，并在各网格层上使用经济的磨光策略. 数值结果表明，本文设计的 NCCD 格式具有四阶的精度. 本文给出的 EEXCMG 法的计算效率优于 ECMG 法和 EXCMG 法.

1　NCCD 格式及截断误差

为方便描述，选取 Ω 为矩形区域 $[0, L_x] \times [0, L_y]$. 将 $[0, L_x]$ 均分成 n_x 等份，即有 $\Delta x = \dfrac{L_x}{n_x}$，类似地，将 $[0, L_y]$ 分成 n_y 等份，$\Delta y = \dfrac{L_y}{n_y}$. 网格点 (x_i, y_j) 对应于 $x_i = i\Delta x$，$y_j = j\Delta y$，$0 \leqslant i \leqslant n_x$，$0 \leqslant j \leqslant n_y$.

---

① 收稿日期：2013－09－08

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11161014)；云南省教育厅科研基金资助项目(2012C121)；云南省科技厅青年项目(2012FD054).

作者简介：李　明(1983－)，男，湖南长沙人，讲师，主要从事偏微分方程数值解法研究.

通信作者：赵金娥.

约定 $u_{i,j}$ 和 $u(x_i, y_j)$ 分别表示 u 在网格点(x_i, y_j)处的近似解和准确解，用 $f_{i,j}$ 表示 $f(x_i, y_j)$.

模型问题(1) 在网格点(x_i, y_j)处的经典的五点中心差分格式为

$$-\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j})-\frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1})+\alpha u_{i,j}=f_{i,j} \tag{2}$$

该格式的精度只有二阶. 为了提高差分格式的精度，借鉴文献[10] 的思想，我们提出如下九点紧致中心差分(NCCD) 格式

$$\begin{aligned}&-\frac{1+r^2}{2}(u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1})-\left(5r^2-1-\frac{\Delta x^2}{2}\alpha\right)(u_{i,j-1}+u_{i,j+1})-\\&\left(5-r^2-\frac{\Delta x^2}{2}\alpha\right)(u_{i-1,j}+u_{i+1,j})+[10(1+r^2)+4\Delta x^2\alpha]u_{i,j}=\\&\frac{\Delta x^2}{2}(8f_{i,j}+f_{i-1,j}+f_{i+1,j}+f_{i,j-1}+f_{i,j+1})\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $r=\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

为了便于讨论截断误差，记 $R(x_i, y_j)$ 为 NCCD 格式在网格点(x_i, y_j)处的截断误差，并取 $h=\Delta x_l=\Delta y_l$，即有 $r=1$. 易知

$$\begin{aligned}R(x_i, y_j)=&[u(x_{i-1}, y_{j-1})+u(x_{i-1}, y_{j+1})+u(x_{i+1}, y_{j-1})+u(x_{i+1}, y_{j+1})]+\\&(4-\frac{h^2}{2}\alpha)[u(x_i, y_{j-1})+u(x_i, y_{j+1})+u(x_{i-1}, y_j)+u(x_{i+1}, y_j)]-\\&(20+4h^2\alpha)u(x_i, y_j)+\frac{h^2}{2}[8f(x_i, y_j)+f(x_{i-1}, y_j)+\\&f(x_{i+1}, y_j)+f(x_i, y_{j-1})+f(x_i, y_{j+1})]\end{aligned} \tag{4}$$

由泰勒展开式可得

$$\begin{aligned}&u(x_{i-1}, y_{j-1})+u(x_{i-1}, y_{j+1})+u(x_{i+1}, y_{j-1})+u(x_{i+1}, y_{j+1})=\\&4u(x_i, y_j)+2h^2\Delta u(x_i, y_j)+O(h^4)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&u(x_i, y_{j-1})+u(x_i, y_{j+1})+u(x_{i-1}, y_j)+u(x_{i+1}, y_j)=\\&4u(x_i, y_j)+h^2\Delta u(x_i, y_j)+O(h^4)\end{aligned} \tag{6}$$

$$f(x_{i-1}, y_j)+f(x_{i+1}, y_j)+f(x_i, y_{j-1})+f(x_i, y_{j+1})=4f(x_i, y_j)+O(h^2) \tag{7}$$

将(5),(6),(7) 式代入(4) 式中，可得

$$R(x_i, y_j)=-\frac{\alpha h^4}{2}\Delta u(x_i, y_j)+O(h^4)+O(h^6)$$

其中 $\Delta u(x_i, y_j)$ 可视为常数，因此 $R(x_i, y_j)=O(h^4)$，即 NCCD 格式具有四阶精度.

选取一系列步长 $h_l=\dfrac{h_0}{2^l}$ 且 $h_l=\Delta x_l=\Delta y_l$，由式(3) 离散问题(1) 可得一系列对应的网格层 Z_l 和方程组

$$\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{u}_l=\boldsymbol{F}_l \qquad l=0,1,\cdots,M \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{A}_l$ 为 h_l 对应的系数对称矩阵，$\boldsymbol{u}_l$ 为待求解向量.

2 经济外推瀑布型多重网格法

在通常的 CMG 法中，粗网格层上的磨光步数将变得非常大. 为了降低这些层上的磨光步数，2007 年，文献[6] 提出了一种在确保 CMG 法收敛的前提下有效降低各层磨光步数的经济的磨光策略和经济瀑布多重网格(ECMG) 法. 其中 ECMG 法与 CMG 法之间的区别在于各层磨光步数选取方法上存在不同.

为了给细网格层提供较好的初始值，文献[7－9] 改进理查森外推公式，提出了新外推公式，给出了新外推瀑布型多重网格(EXCMG) 法. EXCMG 法不同于 CMG 法之处是前者使用了高效的插值算子.

在综合借鉴 ECMG 法和 EXCMG 法两者的优点的基础上，我们提出经济外推瀑布型多重网格(EEXCMG) 法. 其基本思想是，使用新外推公式和三次多项式插值算子，为细网格层提供好的初始值，并在各网格层上使用经济的磨光策略. 算法过程如下

算法 1　EEXCMG 法

步骤 1　精确求解粗网格层 Z_0 和 Z_1 上的解 $\boldsymbol{u}_0^*$ 和 $\boldsymbol{u}_1^*$，令 $l=2$.

步骤 2　使用新外推公式和三次多项式插值算子可得 Z_l 上的初始值 $\boldsymbol{u}_l^0$.

步骤 3　磨光 m_l 次，$\boldsymbol{u}_l^*=G_l^{m_l}(\boldsymbol{u}_l^0)$.

步骤 4　如果 $l<M$，令 $l=l+1$，转步骤 2，否则输出 $\boldsymbol{u}_M^*$.

其中：m_l 的选取见文献[6]；新外推公式见文献[7－9]；$\boldsymbol{u}_l^*=G_l^{m_l}(\boldsymbol{u}_l^0)$ 表示在第 l 层网格上使用某种磨光算子 G_l 对初始值 $\boldsymbol{u}_l^0$ 磨光 m_l 次，并将得到的近似解记为 $\boldsymbol{u}_l^*$.

EEXCMG 法与 ECMG 法均使用经济的磨光策略，但所用的插值算子不同. EEXCMG 法与 EXCMG 法均使用了新外推公式，但在磨光策略和插值算子方面有所不同.

3　数值实验

为了验证本文提出的 NCCD 格式及 EEXCMG 法的有效性，考虑如下算例

例　真解 $u=(\exp(\sin(\pi x))-1)\log(y+1)(y-1)$，$\Omega$：$[0,1]\times[0,1]$，$\alpha=1$，右端函数为

$$f=\log(y+1)(\exp(\sin(\pi x))-1)(y-1)-\pi^2\log(y+1)\exp(\sin(\pi x))\cos^2(\pi x)(y-1)+$$
$$\pi^2\log(y+1)\exp(\sin(\pi x))\sin(\pi x)(y-1)+\frac{(\exp(\sin(\pi x))-1)(y-1)}{(y+1)^2}-\frac{2\exp(\sin(\pi x))-2}{y+1}$$

使用 ECMG 法、EXCMG 法、EEXCMG 法求解 NCCD 格式对应的离散化方程组(式(8)). EXCMG 法第 l 层上的迭代步数取 $4\times 4^{M-l}$，ECMG 法和 EEXCMG 法第 l 层上的迭代步数 m_l 选取方法为[6]：

1) 若 $l>L_0$，则 $m_l=[m_M\beta^{M-l}]$；

2) 若 $l\leqslant L_0$，则 $m_l=[m_*^{\frac{1}{2}}(M-(2-\varepsilon_0)l)k_l]$ 或 $m_l=[m_*^{\frac{1}{2}}(M-(2-\varepsilon_0)l)h_l^{-2}]$.

其中：$\beta=4$，$\varepsilon_0=0.5$，$m_*=1$，L_0 是满足下列不等式的最大正整数

$$L_0\leqslant\min\left\{\frac{M\log\beta+\log m_M+2\log h_0}{\log\beta+2\log 2},\ \frac{M}{2}\right\}$$

约定“FCD”表示五点中心差分格式(即式(2)). “$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty$”表示步长取 h 时对应的差分格式的解与问题真解的无穷范数误差. 差分格式离散(包括直接求解)过程的计算时间和 3 种算法的计算时间都用“cpu”表示. 记收敛阶为 $\mathrm{order}=\log_2\left(\dfrac{\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty}{\|\boldsymbol{u}_{\frac{h}{2}}-\boldsymbol{u}\|_\infty}\right)$. ECMG 法从粗网格层 Z_1 开始，即精确求解 Z_1 上的解. EXCMG 法、EEXCMG 法从最粗层 Z_0 开始，即精确求解 Z_0 和 Z_1 上的解. “$\|\boldsymbol{u}_M^*-\boldsymbol{u}\|_\infty$”表示 3 种算法求得的数值解与问题真解的无穷范数误差.

由表 1 可以看出本文提出的 NCCD 格式的计算精度远高于五点中心格式(FCD). 比如表 1 中，$n_x=n_y=64$ 时，FCD 格式的计算精度为 8.22×10^{-5}，耗时 0.05 s，NCCD 格式的误差为 3.44×10^{-8}，耗时 0.09 s. 可见 NCCD 格式耗时比 FCD 格式稍多，但 NCCD 格式计算精度要高出 3 个量级. 即使 $n_x=n_y=512$ 时，FCD 格式耗时 101 s，其计算精度也只有 1.28×10^{-6}.

表 1　离散格式的计算精度和计算时间比较

Scheme	n_x	$n_y=64$		$n_y=128$		$n_y=256$		$n_y=512$	
		$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s	$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s	$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s	$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s
FCD	64	8.22E－05	0.05						
NCCD		3.44E－08	0.09						
FCD	128	1.56E－05	0.12	2.05E－05	0.43				
NCCD		9.48E－10	0.16	2.15E－09	0.50				
FCD	256	4.3E－06	0.37	3.91E－06	1.37	5.14E－06	4.70		
NCCD		6.21E－10	0.42	5.93E－11	1.50	1.34E－10	5.13		
FCD	512	6.48E－06	1.25	1.08E－06	4.98	9.78E－07	22.2	1.28E－06	101
NCCD		8.75E－10	1.37	3.89E－11	5.26	3.71E－12	24.1	8.39E－12	109

由表2可以看出，NCCD格式的收敛阶为4，即NCCD格式具有四阶精度，验证了前面的理论结果.

由表3可以看出，与ECMG法相比，EEXCMG法虽然计算时间稍多一些，但在计算精度方面要高3个量级. 与EXCMG法相比，EEXCMG法的计算精度稍优于EXCMG法，计算时间则明显优于EXCMG法.

表2　离散格式的收敛阶比较

$n_x \times n_y$	FCD		NCCD	
	$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_\infty$	order	$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_\infty$	order
32×32	3.29E−04	—	5.51E−07	—
64×64	8.22E−05	2.00	3.44E−08	4.00
128×128	2.05E−05	2.00	2.15E−09	4.00
256×256	5.14E−06	2.00	1.34E−10	4.00
512×512	1.28E−06	2.00	8.39E−12	4.00

表3　数值算法的计算精度和计算时间比较

M	Z_M	ECMG		EXCMG		EEXCMG	
		$\|\boldsymbol{u}_M^* - \boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s	$\|\boldsymbol{u}_M^* - \boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s	$\|\boldsymbol{u}_M^* - \boldsymbol{u}\|_\infty$	cpu/s
3	128×128	4.55E−04	0.06	2.69E−06	0.22	9.14E−07	0.09
	256×256	1.48E−04	0.25	3.45E−07	0.77	2.22E−07	0.16
	512×512	3.94E−05	0.48	2.49E−08	3.12	1.74E−08	0.76
4	128×128	4.55E−04	0.06	2.02E−06	0.27	1.15E−06	0.08
	256×256	1.47E−04	0.28	2.12E−07	0.83	1.36E−07	0.28
	512×512	7.25E−05	0.76	9.01E−08	3.57	3.49E−08	0.86
5	128×128	4.55E−04	0.11	9.11E−06	0.29	7.01E−06	0.11
	256×256	1.47E−04	0.28	1.09E−06	0.90	7.17E−07	0.31
	512×512	7.25E−05	0.92	1.29E−07	3.76	7.40E−08	1.11

综上可知，NCCD格式具有四阶精度，EEXCMG法计算时间短，计算精度高. 进一步丰富了二维椭圆问题的离散格式和数值算法.

致谢：感谢评审专家提出的宝贵意见和建议.

参考文献：

[1] BORNEMANN F，DEUFHARD P. The Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems [J]. Numer Math，1996，75(2)：125−152.

[2] BORNEMANN F，DEUFHARD P. The Cascadic Multigrid Method [C] //The Eighth Interational Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. New York：Wiley，1997.

[3] SHAIDUROV V V. Some Estimates of the Rate of Convergence for the Cascadic Conjugate-Gradient Method [J]. Comp Math Appl，1996，31(4)：161−171.

[4] SHI Z C，XU X J. Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems [J]. Numer Math，1999，7(3)：199−209.

[5] SHI Z C，XU X J. Cascadic Multigrid Method for Parabolic Problems [J]. Comp Math，2000，18(5)：551−560.

[6] 石钟慈，许学军，黄云清. 经济的瀑布型多重网格法 [J]. 中国科学：A辑，2007，50(2)：1766−1780.

[7] CHEN C M，HU H L，XIE Z Q，et al. Analysis of Extrapolation Cascadic Multigrid Method (EXCMG) [J]. Sci China Ser A-Math，2008，51(8)：1−12.

[8] CHEN C M，HU H L，XIE Z Q，et al. L^2-Error of Extrapolation Cascadic Multigrid (EXCMG) [J]. Acta Math Sci，2009，29B(3)：539−551.

[9] CHEN C M，SHI Z C，HU H L. On Extrapolation Cascadic Multigrid Method [J]. Comp Math，2011，29(2)：

684－697.

[10] ZHANG J. Multigrid Method and Fourth-Order Compact Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization [J]. Comp Phys，2002，179(1)：170－179.

[11] 李　明，李郴良. 基于新外推法和三次样条函数的新瀑布型多重网格法 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(9)：22－24.

[12] 李　明，崔向照，李郴良. 求解二阶变系数椭圆边值问题的代数两网格法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(9)：19－23.

Economical Extrapolation Cascadic Multigrid Method for the Two-Dimensional Elliptic Problem

LI　Ming，　ZHAO Jin-e

Department of Mathematics，Honghe University，Mengzi Yunnan 661199，China

Abstract：Firstly，a nine-point compact center different (NCCD) formula of the two-dimensional elliptic problem is constructed，and the truncation error of the formula is discussed. Secondly，based on the new different formula，an economical extrapolation cascadic multigrid (EEXCMG) method is proposed，in which the new extrapolation formula and cubic interpolation operator are used to provide a better initial value on the finer grids and an economical smoothing strategy is applied on those grids. The results of a numerical experiment demonstrate that the NCCD formula can obtain fourth-order accuracy and the EEXCMG method is effective.

Key words：compact center difference formula；new extrapolation formula；economical smoothing strategy；economical extrapolation cascadic multigrid method

责任编辑　张　枸