DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.07.013

一类 3 种群系统的动力学行为及优化问题研究①

李雅芝[1,2]，　窦家维[1]

1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062；2. 黔南民族师范学院 数学系，贵州 都匀 558000

摘要：通过对食饵—捕食系统引入食饵互惠种群建立了一个 3 种群系统，研究了其动力学行为及优化收获策略. 首先分析了系统平衡态的存在性和稳定性条件，结果显示过度收获会导致种群灭绝. 其次讨论了系统的优化控制问题，在可持续发展的前提下，以长期的生态经济利益最大化为目标，利用 Pontryagin 极值原理，获得了最优收获策略，并且得到了无限折扣率使得经济利润完全消失的结论.

关　键　词：捕食—被捕食系统；收获；平衡态；稳定性；最优收获策略

中图分类号：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)7-0073-06

种群动力学自发展以来，已经吸引了来自生物、生态和经济等各科学群体与商业群体的广泛关注[1-2]. 多物种渔业资源的收获是研究渔业模型的一个重要方面：文献[1] 对与此领域相关的问题和研究方法已经做了详细分析；文献[3－5] 对于具收获的多种群系统的动力学行为做了深入研究并得到了丰富的结果. 从商业角度出发，其目的是收获种群以获取经济利益，而一旦有收获发生，种群很可能在有限时间内灭绝. 为了缓解食饵密度偏低的状况，本文引进了食饵种群的互惠种群. 并采用 Holling II 型功能反应函数，建立了如下 3 种群系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)+axy-\dfrac{bxz}{A+x}-q_1Ex\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=sy\left(1-\dfrac{y}{L}\right)+cxy\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{dxz}{A+x}-mz-q_2Ez\end{cases}\tag{1}$$

其中：$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 分别表示食饵、互惠种群、捕食者种群在 t 时刻的密度；食饵和其互惠种群均按照 logistic 增长率发展；r,s,K,L,a,c 均为正常数；种群 x 与种群 z 是捕食 — 被捕食关系；$\dfrac{bxz}{A+x}$ 表示捕食者的功能性反应；正常数 A 表示 Holling II 功能反应的半饱和常数；b,d 分别表示捕获率及转化率，满足 $0<d<b$；正常数 m 为捕食者的死亡率；正常数 E 表示对食饵与捕食者进行收获的努力量；正常数 q_1，q_2 分别表示对两种群的捕获系数.

显然，$\mathbb{R}_+^3=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3：x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$ 是系统(1) 的正不变集，由模型的实际意义，本文仅在 $\mathbb{R}_+^3$ 中研究问题.

---

①　收稿日期：2013-06-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61272435，61373020).
作者简介：李雅芝(1990-)，女，山西晋城人，硕士研究生，主要从事微分方程的研究.

1 稳定性分析

本部分主要对系统(1)进行定性分析，首先有下面结论.

定理 1 系统(1)具有正初值(x_0, y_0, z_0)的解在Ω内是一致有界的，且集合$\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^3$是系统(1)的正不变集，其中$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leqslant x + y + \frac{b}{d}z \leqslant \frac{H}{m + q_2 E}\right\}$，$H = \frac{K(r - q_1 E + m + q_2 E)^2}{4r} + \frac{L(s + m + q_2 E)^2}{4s} + (a + c)KL$.

证 首先由于$\mathbb{R}_+^3$是系统(1)的正不变集，设$(x(t), y(t), z(t))$为系统(1)具有初值$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_+^3$的解，则对所有$t \geqslant 0$，有$(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}_+^3$.

定义 Lyapunov 函数$M(t) = x + y + \frac{b}{d}z$，则有

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + (m + q_2 E)M \leqslant \frac{K(r - q_1 E + m + q_2 E)^2}{4r} + \frac{L(s + m + q_2 E)^2}{4s} + (a + c)KL = H$$

解上面微分不等式，得

$$M(t) \leqslant \mathrm{e}^{-(m + q_2 E)t}\left(M(0) - \frac{H}{m + q_2 E}\right) + \frac{H}{m + q_2 E}$$

因为对任意的$(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$，有

$$M(0) = x_0 + y_0 + \frac{b}{d}z_0 \leqslant \frac{H}{m + q_2 E}$$

所以当$t \to \infty$时，有$0 \leqslant M(t) \leqslant \frac{H}{m + q_2 E}$，即证得$\Omega$为系统(1)的正不变集. 进一步可知存在常数$M_1 > 0$，使得对所有的$t \geqslant 0$，有$x(t), y(t), z(t) \leqslant M_1$成立，即系统(1)的任意解是有界的.

关于系统(1)的平衡态，有如下结果：

定理 2 系统(1)可能存在下面平衡态：

(i) 灭绝平衡态$F_1(0, 0, 0)$及捕食者—食饵灭绝平衡态$F_2(0, L, 0)$总存在.

(ii) 当$E < \frac{r}{q_1}$时，捕食者—食饵互惠种群灭绝平衡态$F_3(x_3, 0, 0)$存在，其中$x_3 = K\left(1 - \frac{q_1 E}{r}\right)$.

(iii) 当$E < \min\left\{\frac{r + aL}{q_1}, \frac{r(s + cK)}{q_1 cK}\right\}$且$acKL < sr$时，捕食者灭绝平衡态$F_4(x_4, y_4, 0)$存在，其中$x_4 = \frac{-sK(r - q_1 E + aL)}{acKL - sr}$，$y_4 = \frac{-L[cK(r - q_1 E) + sr]}{acKL - sr}$.

(iv) 当$E < \min\left\{\frac{r}{q_1}, \frac{d - m}{q_2}\right\}$且$K(r - q_1 E)(d - m - q_2 E) > rA(m + q_2 E)$时，食饵互惠种群灭绝平衡态$F_5(x_5, 0, z_5)$存在，其中$x_5 = \frac{A(m + q_2 E)}{d - m - q_2 E}$，$z_5 = \frac{\mathrm{d}A[K(r - q_1 E)(d - m - q_2 E) - rA(m + q_2 E)]}{bK(d - m - q_2 E)^2}$.

(v) 当$E < \min\left\{\frac{r + aL}{q_1}, \frac{d - m}{q_2}\right\}$且$Ks(r - q_1 E + aL)(d - m - q_2 E) + A(acKL - sr)(m + q_2 E) > 0$，时，内部平衡态$F_6(x_6, y_6, z_6)$存在，其中$x_6 = \frac{A(m + q_2 E)}{d - m - q_2 E}$，$y_6 = \frac{L[s(d - m - q_2 E) + cA(m + q_2 E)]}{s(d - m - q_2 E)}$，$z_6 = \frac{\mathrm{d}A[Ks(r + aL - q_1 E)(d - m - q_2 E) + A(acKL - sr)(m + q_2 E)]}{sbK(d - m - q_2 E)^2}$.

平衡态的局部稳定性由下面 Jacobian 矩阵的特征根的性质决定：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} r\left(1-\frac{2x}{K}\right)+ay-q_1E-\frac{Abz}{(A+x)^2} & ax & \frac{-bx}{A+x} \\ cy & s\left(1-\frac{2y}{L}\right)+cx & 0 \\ \frac{A\mathrm{d}z}{(A+x)^2} & 0 & \frac{\mathrm{d}x}{A+x}-(m+q_2E) \end{pmatrix}$$

定理 3　平衡态 $F_1(0,0,0)$ 不稳定；如果 $F_3(x_3,0,0)$ 和 $F_5(x_5,0,z_5)$ 存在，则它们也是不稳定的.

证　设对应于 F_1, F_3 和 F_5 的 Jacobian 矩阵分别为 $\boldsymbol{J}_{F_1}$, $\boldsymbol{J}_{F_3}$, $\boldsymbol{J}_{F_5}$.

由矩阵 $\boldsymbol{J}$ 及各平衡态的存在条件易知上面 3 个矩阵均存在具有正实部的特征根，因此 F_1, F_3 和 F_5 均不稳定.

定理 4　如果 $E>\frac{r+aL}{q_1}$，则 $F_2(0,L,0)$ 全局渐近稳定.

证　设对应于 F_2 的 Jacobian 矩阵为 $\boldsymbol{J}_{F_2}$，由定理条件可得 $\boldsymbol{J}_{F_2}$ 的 3 个特征根均具有负实部，故 F_2 局部渐近稳定. 构造 Lyapunov 函数 $V(t)=x+\left(y-L-L\ln\frac{y}{L}\right)+\frac{b}{d}z$，经详细推导可得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，即 F_2 全局渐近稳定.

注　定理 4 说明当收获努力量 E 超过某个值时，被收获的两种群都会灭绝，且无法恢复.

定理 5　如果 $\frac{-\mathrm{d}sK(r+aL-q_1E)}{A(acKL-sr)-sK(r+aL-q_1E)}-(m+q_2E)<0$，则捕食者灭绝平衡态 $F_4(x_4,y_4,0)$ 局部渐近稳定. 进一步，如果 $\frac{s}{L}>\frac{K[(a+c)A+cx_4]^2}{4rA(A+x_4)}$，则 F_4 全局渐近稳定.

证　设对应于 F_4 的 Jacobian 矩阵为 $\boldsymbol{J}_{F_4}$，由定理条件可得 $\boldsymbol{J}_{F_4}$ 的 3 个特征根均具有负实部，故 F_4 局部渐近稳定. 其全局稳定性可由构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=k\left(x-x_4-x_4\ln\frac{x}{x_4}\right)+\left(y-y_4-y_4\ln\frac{y}{y_4}\right)+\frac{b}{d}z$$

(其中 $k=\frac{A}{A+x_4}$) 证得.

由于对应于内部平衡态 $F_6(x_6,y_6,z_6)$ 的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{F_6}=\begin{pmatrix} B & ax_6 & \frac{-bx_6}{A+x_6} \\ cy_6 & D & 0 \\ \frac{A\mathrm{d}z_6}{(A+x_6)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$B=r-q_1E-\frac{2rx_6}{K}+ay_6-\frac{Abz_6}{(A+x_6)^2}\qquad D=s\left(1-\frac{2y_6}{L}\right)+cx_6$$

特征多项式为：

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+b_1\lambda+c_1=0$$

其中

$$a_1=-B-D\qquad b_1=BD-acx_6y_6+\frac{Ab\mathrm{d}x_6z_6}{(A+x_6)^3}\qquad c_1=\frac{-Ab\mathrm{d}x_6z_6}{(A+x_6)^3}D$$

由 Routh-Hurwitz 判据可证明下面定理.

定理 6　如果 $a_1>0$，$b_1>0$，$c_1>0$ 且 $a_1b_1-c_1>0$，则 $F_6(x_6,y_6,z_6)$ 局部渐近稳定. 进一步，如果 $\frac{r}{K}>\frac{bz_6}{A(A+x_6)}$ 且 $\frac{s}{L}>\frac{K[(a+c)A+cx_6]^2}{4[rA(A+x_6)-bKz_6]}$，则 F_6 全局渐近稳定.

证　由构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=k\left(x-x_6-x_6\ln\frac{x}{x_6}\right)+\left(y-y_6-y_6\ln\frac{y}{y_6}\right)+\frac{b}{d}\left(z-z_6-z_6\ln\frac{z}{z_6}\right)$$

$\left(\text{其中 } k=\dfrac{A}{A+x_6}\right)$可证得.

2 优化收获策略

本节讨论系统(1)的优化收获问题，考虑下面带有折扣率的连续时间利润的现值函数：

$$J=\int_0^{\infty}(p_1q_1x+p_2q_2z-C)E(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t \tag{2}$$

其中：δ 为贴现率，控制变量 $E(t)$ 满足约束条件 $0\leqslant E(t)\leqslant E_{\max}$，$E_{\max}$ 是所有可行收获努力量的上限，即控制集为 $V(t)=[0,E_{\max}]$.

下面将应用文献[6]中给出的 Pontryagin 极大值原理获得最优收获策略. 当按照此优化策略收获时可以获得最大的利润.

由文献[6]，定义哈密顿函数为：

$$H=(p_1q_1x+p_2q_2z-C)E\mathrm{e}^{-\delta t}+\lambda_1\left[rx\left(1-\frac{x}{K}\right)+axy-\frac{bxz}{A+x}-q_1Ex\right]+$$
$$\lambda_2\left[sy\left(1-\frac{y}{L}\right)+cxy\right]+\lambda_3\left(\frac{\mathrm{d}xz}{A+x}-mz-q_2Ez\right) \tag{3}$$

其中：$\lambda_i=\lambda_i(t)$，$i=1,2,3$ 为伴随变量. 令 $\Psi(t)=(p_1q_1x+p_2q_2z-C)\mathrm{e}^{-\delta t}-\lambda_1q_1x-\lambda_3q_2z$ 为转换函数.

使得 H 取最大值的最优控制 $E(t)$ 应满足下面条件：

$$E=\begin{cases}E_{\max} & \Psi(t)=(p_1q_1x+p_2q_2z-C)\mathrm{e}^{-\delta t}-\lambda_1q_1x-\lambda_3q_2z>0\\ 0 & \Psi(t)=(p_1q_1x+p_2q_2z-C)\mathrm{e}^{-\delta t}-\lambda_1q_1x-\lambda_3q_2z<0\end{cases} \tag{4}$$

其中：函数 $\lambda_i\mathrm{e}^{\delta t}(i=1,2)$ 表示“影子价格”，$p_1q_1x+p_2q_2z-C$ 为“单位经济净收益”.(4)式说明 $E=E_{\max}$ 或 0 取决于 $\lambda_1\mathrm{e}^{\delta t}q_1x+\lambda_3\mathrm{e}^{\delta t}q_2z$ 与单位经济净收益的关系.

当 $\Psi(t)=0$ 时，即当 $\lambda_1\mathrm{e}^{\delta t}q_1x+\lambda_3\mathrm{e}^{\delta t}q_2z$ 等于渔民的单位净收益时，哈密顿函数 H 变得与控制变量 $E(t)$ 无关，即 $\dfrac{\partial H}{\partial E}=0$，满足此条件的控制为奇异控制. 奇异控制应满足 $\Psi(t)=0$，即为：

$$\lambda_1\mathrm{e}^{\delta t}q_1x+\lambda_3\mathrm{e}^{\delta t}q_2z=p_1q_1x+p_2q_2z-C \tag{5}$$

所以最优收获策略应满足：

$$E(t)=\begin{cases}E_{\max} & \Psi(t)>0\\ 0 & \Psi(t)<0\\ E^* & \Psi(t)=0\end{cases} \tag{6}$$

下面主要寻求该优化问题的最优平衡解，此时 x,y,z,E 均为常数，且满足系统(1)及(5)式.

由 Pontryagin 极大值原理，得到伴随方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-p_1q_1E\mathrm{e}^{-\delta t}-\lambda_1\left[r\left(1-\frac{2x}{K}\right)+ay-\frac{Abz}{(A+x)^2}-q_1E\right]-\lambda_2cy-\lambda_3\frac{A\mathrm{d}z}{(A+x)^2} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\lambda_1ax-\lambda_2\left[s\left(1-\frac{2y}{L}\right)+cx\right] \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial z}=-p_2q_2E\mathrm{e}^{-\delta t}+\lambda_1\frac{bx}{A+x}-\lambda_3\left(\frac{\mathrm{d}x}{A+x}-m-q_2E\right) \tag{9}$$

下面将结合横截条件 $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda_i(t)=0$，$i=1,2,3$，求解伴随方程.

结合(5),(9)式可写为：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t}-\lambda_3B_1=-B_2\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{10}$$

其中

$$B_1=\frac{-bq_2z}{q_1(A+x)}-\frac{\mathrm{d}x}{A+x}+(m+q_2E)\qquad B_2=p_2q_2E-\frac{b(p_1q_1x+p_2q_2z-C)}{q_1(A+x)}$$

求解(10)式得到

$$\lambda_3(t)=\frac{B_2}{B_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}\tag{11}$$

类似地，结合(5),(11),(8)式有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t}-\lambda_2D_1=-D_2\mathrm{e}^{-\delta t}\tag{12}$$

其中

$$D_1=-\left[s\left(1-\frac{2y}{L}\right)+cx\right]\qquad D_2=a\left[\frac{p_1q_1x+p_2q_2z-C}{q_1}-\frac{q_2B_2z}{q_1(B_1+\delta)}\right]$$

求解(12)式得到

$$\lambda_2(t)=\frac{D_2}{D_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}\tag{13}$$

结合(11),(13),(7)式有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t}-\lambda_1M_1=-M_2\mathrm{e}^{-\delta t}\tag{14}$$

其中

$$M_1=-\left[r\left(1-\frac{2x}{K}\right)+ay-\frac{Abz}{(A+x)^2}-q_1E\right]\qquad M_2=p_1q_1E+\frac{cyD_2}{D_1+\delta}+\frac{A\mathrm{d}B_2z}{(A+x)^2(B_1+\delta)}$$

求解(14)式得到

$$\lambda_1(t)=\frac{M_2}{M_1+\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}\tag{15}$$

将(11)和(15)式代入(5)式可知奇异控制应满足

$$\frac{M_2}{M_1+\delta}q_1x+\frac{B_2}{B_1+\delta}q_2z=p_1q_1x+p_2q_2z-C\tag{16}$$

由系统(1)得，

$$y=\left(1+\frac{cx}{s}\right)L\qquad E=\frac{1}{q_2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{A+x}-m\right)\qquad z=\frac{A+x}{b}\left[r\left(1-\frac{x}{K}\right)+ay-q_1E\right]$$

所以 B_1,B_2,D_1,D_2,M_1,M_2 均可表达为 x 的函数，如此(16)式可写为 $F(x)=0$.

如果 $F(0)F(K)<0$，则 $F(x)=0$ 在区间$(0,K)$内存在正实根 $x=x_\delta$. 对于 $x=x_\delta$ 可得到

$$y_\delta=\left(1+\frac{cx_\delta}{s}\right)L\qquad E_\delta=\frac{1}{q_2}\left(\frac{\mathrm{d}x_\delta}{A+x_\delta}-m\right)z_\delta=\frac{A+x_\delta}{b}\left[r\left(1-\frac{x_\delta}{K}\right)+ay_\delta-q_1E\right]$$

如果 $x_\delta>\dfrac{Am}{d-m}$，则有 $E_\delta>0$. 由此得到的控制 $E=E_\delta$ 即为最优常量控制，对应的$(x_\delta,y_\delta,z_\delta)$是系统(1)对应于该控制的平衡解. 由(11),(13)和(15)式得知 $\lambda_i\mathrm{e}^{\delta t}(i=1,2,3)$ 在最优平衡态处与时间无关，所以 $\lambda_i\mathrm{e}^{\delta t}(i=1,2,3)$ 在 ∞ 处满足横截条件[7]，即当 $t\to\infty$ 时，$\lambda_i\mathrm{e}^{\delta t}(i=1,2,3)$ 是有界的，并且当 $\delta\to\infty$ 时，有

$$p_1q_1x_\delta+p_2q_2z_\delta-C=\frac{M_2}{M_1+\delta}q_1x_\delta+\frac{B_2}{B_1+\delta}q_2z_\delta\to0$$

故经济净利润 $\pi(x_\delta,y_\delta,z_\delta,E_\delta)=0$，说明无限折扣率使得经济净利润趋于零，此时应该禁止捕捞.

3　结束语

本文对一个食饵—互惠—捕食者的 3 种群模型的动力学行为及其优化问题进行了讨论. 首先，研究了

系统解的有界性，然后讨论了平衡态的存在性，并且从局部和全局角度给出了平衡态的稳定性条件. 进一步，利用 Pontryagin 极大值原理研究种群的最优收获策略，结果显示：在平衡解处，如果折扣率增大，则经济净收益会减少，甚至当折扣率趋于无穷的时候，经济净收益会趋于零，由此可知如何收获为最优与当前的折扣率密切相关.

参考文献：

[1] CLARK C W. Mathematical Bioeconomics，the Optimal Management of Renewable Resources [M]. 2nd ed. New York：Wiley，1990.

[2] COLINVAUX P A. Ecology [J]. New York：Wiley，1986.

[3] LI Zu-xiong，HUANG Jian-min，CHEN Lan-sun. Persistence and Periodicity of a Predator-Prey System with Holoing-III Functional Response and Impulsive Effect [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：13－18.

[4] 黄建科，吴筱宁. 基于比率的三种群捕食模型的稳定性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2007，31(6)：588－590.

[5] MYERSCOUGH M R，GRAY B F，HOGARTH W L，et al. An Analysis of an Ordinary Differential Equations Model for a Two Species Predator-Prey System with Harvesting and Stocking [J]. J Math Biol，1992，30(4)：389－411.

[6] PONTRYAGIN L S，V S BOLTYANSKI GAMKRELIDZE，MISHCHENCO E F. The Mathematical Theory Of Optimal Processes [M]. New York：Wiley，1987.

[7] ARROW K J，KURZ M. Public Investment. The Rate of Return and Optimal Fiscal Policy [M]. Baltimore：John Hopkins University Press，1970.

Dynamics and Optimization of a Three-Population System

LI Ya-zhi[1,2]， DOU Jia-wei[1]

1. *College of Mathematics and Information Science，Shaanxi Normal University，Xi'an 710062，China；*
2. *Department of Mathematics，Qiannan Normal College for Nationalities，Duyun Guizhou 558000，China*

Abstract：A cooperative population of the prey is introduced into a prey-predator system. The dynamics of the three-population system and the optimal harvesting strategy for it are investigated. First，the existence and stability of the equilibrium solutions of the system are analyzed，and the results indicate that overharvesting may lead to resource extinction. Then，the problem of the optimal control of the system is discussed. On the premise of sustainable development and with maximizing the long-term ecological and economic benefits as the object，the optimal harvesting strategy for it are obtained by using Pontryagin's maximum principle. Finally，it is concluded that an infinite discount rate will lead to complete dissipation of economic rent.

Key words：prey-predator system；harvesting；equilibrium；stability；optimal harvesting strategy

责任编辑 张 枸