第 36 卷第 8 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2014 年 8 月
Vol. 36　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.08.011

强 $\mathscr{P}$-正则半群的一个分类①

王 守 峰

云南师范大学 数学学院，昆明 650500

摘要：众所周知，纯正半群可根据其幂等元集进行分类. 类似于纯正半群，$\mathscr{P}$-正则半群可根据其投射集进行分类. 根据强 $\mathscr{P}$-正则半群的投射集给出了这类半群的一个分类. 另外，对强 $\mathscr{P}$-正则半群的若干子类进行了刻画.

关　键　词：强 $\mathscr{P}$-正则半群；投射集；分类

中图分类号：O152.7　　　**文献标志码：A**　　　**文章编号：**1673－9868(2014)8－0070－05

逆半群和完全正则半群是半群代数理论研究中最受重视的两类半群. 这两类半群现已研究得较为充分，可参见文献[1－4]. 作为逆半群的推广，纯正半群也已得到充分研究，例如文献[5]及其参考文献. 为了推广逆半群和纯正半群，文献[6－7]分别引入了具有 $\mathscr{P}$-系的半群和 $\mathscr{P}$-正则半群的概念. 纯正半群的许多结果已经推广到了 $\mathscr{P}$-正则半群，例如文献[8]及其参考文献.

众所周知，纯正半群可根据其幂等元集进行分类. 本文的目的是根据强 $\mathscr{P}$-正则半群的投射集给出这类半群的一个分类，并对强 $\mathscr{P}$-正则半群的若干子类进行刻画. 本文的结果丰富和推广了文献[5]的相应结果.

1　预备知识

设 S 是半群. 记 S 的幂等元集为 $E(S)$，而关于任意 $a \in S$，记

$$V(a)=\{x \in S \mid xax=x,\ axa=a\}$$

半群 S 称为正则的，若对任意 $a \in S$，有 $V(a) \neq \varnothing$. 正则半群 S 称为纯正的，若 $E(S)$ 是 S 的子半群. 设 S 是正则半群. 据文献[7]，$E(S)$ 的非空子集 P 称为 S 的特征集，若关于任意 $p, q \in P$ 和 $a \in S$，存在 $a^{+} \in V(a)$ 使得 $pq \in E(S)$，$pqp, apa^{+}, a^{+}pa, aa^{+}, a^{+}a \in P$. 此时，$S$ 称为以 P 为投射集的 $\mathscr{P}$-正则半群，记为 $S(P)$. 对任意 $a \in S(P)$，满足条件 $apa^{+}, a^{+}pa, aa^{+}, a^{+}a \in P$ 的逆元 a^{+} 称为 a 的 $\mathscr{P}$-逆元，而记 a 的所有 $\mathscr{P}$-逆元构成的集合为 $V_P(a)$. 正则半群 S 的特征集 P 称为 $\mathscr{P}$-系，若对任意 $a \in S(P)$，有 $|V_P(a)|=1$.

正则半群 S 的特征集 P 称为强的，若对任意 $p, q \in P$，$pq \in P$ 蕴含 $qp \in P$. 此时称 $S(P)$ 为强 $\mathscr{P}$-正则半群. 一般情况下，特征集未必是强特征集. 但据文献[8]，一个正则半群若含特征集，则必含强特征集. 易见，纯正半群的幂等元集是特征集.

令 $S(P)$ 和 $T(Q)$ 是两个 $\mathscr{P}$-正则半群，则 S 到 T 的同态(同构)ξ 称为一个 $\mathscr{P}$-同态($\mathscr{P}$-同构)，若 $P\xi = S\xi \cap Q$. 我们用"$\mathscr{P}$-同余"表示 $\mathscr{P}$-正则半群上的一般的同余. 若 ρ 是 $\mathscr{P}$-正则半群 $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余，则 $S\rho^{\#}(P\rho^{\#})$ 也是一个 $\mathscr{P}$-正则半群，其中 $\rho^{\#}$ 是由 ρ 诱导的 S 到 S/ρ 的自然同态. 习惯上，记 $S\rho^{\#}(P\rho^{\#})$ 为

---

① 收稿日期：2013－09－18

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11226049，11301470)；云南省科技计划项目(2012FB139).

作者简介：王守峰(1979－)，男，山东莱芜人，副教授，主要从事半群代数理论的研究.

$S(P)/\rho$. 若 ρ 是 $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余且满足条件

$$a\rho b \Longrightarrow a^+ \rho b^+ \qquad \forall a,b \in S, \ \forall a^+ \in V_P(a), \ \forall b^+ \in V_P(b)$$

则称 ρ 为强 $\mathscr{P}$-同余. 记 $S(P)$ 上的最小强 $\mathscr{P}$-同余为 γ.

关于强 $\mathscr{P}$-正则半群, 据文献[7-8], 有以下结论:

引理 1 设 $S(P)$ 是强 $\mathscr{P}$-正则半群, $a,b \in S$, $e \in E(S)$, $p \in P$, 则

(1°) $(a, b) \in \gamma$ 当且仅当 $V_P(a) = V_P(b)$;

(2°) $\gamma \cap \mathscr{H}$ 是 S 上的相等关系;

(3°) $V_P(e) \subseteq E(S)$, $p \in V_P(p) \subseteq P$;

(4°) $V_P(a) \cap V_P(b) \neq \varnothing$ 蕴含 $V_P(a) = V_P(b)$;

(5°) $V_P(a)V_P(b) \subseteq V_P(ba)$;

(6°) 若 $a' \in V(a)$ 且 $aa', a'a \in P$, 则 $a' \in V_P(a)$.

推论 1 设 $S(P)$ 是强 $\mathscr{P}$-正则半群, $e \in E(S)$. 则包含 e 的 γ-类是 $S(P)$ 的子带.

推论 2 设 P 是正则半群 S 的强特征集. 则 P 是 $\mathscr{P}$-系当且仅当 S 的任何 $\mathscr{L}$-类和 $\mathscr{R}$-类最多只含 P 中的 1 个元素.

证 设 P 是 $\mathscr{P}$-系, 且 $p,q \in P$, 使得 $p\mathscr{L}q$ 或 $p\mathscr{R}q$. 据引理 1 的条款(3°)和(6°), 有 $p,q \in V_P(p)$, 进而有 $p = q$. 反之, 设 $a \in S$ 且 $a_1, a_2 \in V_P(a)$. 则 $aa_1, aa_2, a_1a, a_2a \in P$, $aa_1\mathscr{R}aa_2$, $a_1a\mathscr{L}a_2a$. 由假设知 $aa_1 = aa_2$, $a_1a = a_2a$, 这表明 $a_1 = a_1aa_1 = a_2aa_1 = a_2aa_2 = a_2$.

推论 3 若 ρ 是强 $\mathscr{P}$-正则半群 $S(P)$ 上的强 $\mathscr{P}$-同余, 则 $P\rho$ 是 $S(P)/\rho$ 的 $\mathscr{P}$-系.

证 设 $p,q \in P$ 且 $p\rho, q\rho \in P\rho$, $p\rho\mathscr{L}q\rho$. 则有$(pq, p) \in \rho$ 和$(qp, q) \in \rho$. 据引理 1 的条款(3°), 有 $q \in V_P(q)$ 和 $p \in V_P(p)$, 再据引理 1 的条款(5°)便知 $qp \in V_P(pq)$. 注意到 ρ 是强 $\mathscr{P}$-同余, 且$(pq, p) \in \rho$, 有$(qp, p) \in \rho$. 由于$(qp, q) \in \rho$, 故$(p, q) \in \rho$, 进而有 $p\rho = q\rho$. 这表明任意 $\mathscr{L}$-类最多含 $P\rho$ 中的一个元素. 对偶可证任意 $\mathscr{R}$-类最多含 $P\rho$ 中的一个元素. 据推论 2, $P\rho$ 是 $S(P)/\rho$ 的 $\mathscr{P}$-系.

2 主要结果

本节考虑强 $\mathscr{P}$-正则半群的分类问题. 记

$$\mathscr{P}\mathscr{S} = \{S(P) \mid P \text{ 是 } S \text{ 的强特征集}\} \qquad \mathscr{R}^* = \{S(P) \mid P \text{ 是 } S \text{ 的 } \mathscr{P}\text{-系}\}$$

定义 1 设 $S(P) \in \mathscr{P}\mathscr{S}$.

(1°) $S(P)$ 为左半正则(右半正则)的, 若 $S(P)$ 满足以下条件:

$$p\mathscr{L}q \Longrightarrow rp\mathscr{L}rq \ (p\mathscr{R}q \Longrightarrow pr\mathscr{R}qr) \qquad \forall p,q,r \in P$$

$S(P)$ 为正则的, 若它既左半正则又右半正则.

(2°) $S(P)$ 为左半正规(右半正规)的, 若 $S(P)$ 左半正则(右半正则), 且满足以下条件:

$$p \in V_P(q) \Longrightarrow pr\mathscr{L}qr \ (p \in V_P(q) \Longrightarrow rp\mathscr{R}rq) \qquad \forall p,q,r \in P$$

(3°) $S(P)$ 为左拟正规(右拟正规)的, 若 $S(P)$ 左(右)半正规且右(左)半正则. $S(P)$ 为正规的, 若它既左拟正规又右拟正规.

(4°) $S(P)$ 为左正则(右正则)的, 若 $S(P)$ 满足以下条件:

$$p\mathscr{R}q \Longrightarrow p = q \ (p\mathscr{L}q \Longrightarrow p = q) \qquad \forall p,q \in P$$

(5°) $S(P)$ 为左正规(右正规)的, 若 $S(P)$ 左正则(右正则), 且满足以下条件:

$$p\mathscr{L}q \Longrightarrow rp = rq \ (p\mathscr{R}q \Longrightarrow pr = qr) \qquad \forall p,q,r \in P$$

为方便起见, 用 $\mathscr{L}\mathscr{S}\mathscr{R}\mathscr{P}\mathscr{S}$ ($\mathscr{R}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{L}\mathscr{S}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{L}\mathscr{Q}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{L}\mathscr{R}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{L}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$) 记左半正则(正则、左半正规、左拟正规、正规、左正则、左正规)强 $\mathscr{P}$-正则半群类. 对偶地, 我们有 $\mathscr{R}\mathscr{S}\mathscr{R}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{R}\mathscr{S}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{R}\mathscr{Q}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$, $\mathscr{R}\mathscr{R}\mathscr{P}\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{R}\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{S}$.

命题 1 下面的包含关系成立:

(1°) $\mathscr{LNPS}\subseteq\mathscr{LRPS}\subseteq\mathscr{LQNPS}\subseteq\mathscr{LSNPS}\subseteq\mathscr{LSRPS}$;

(2°) $\mathscr{RNPS}\subseteq\mathscr{RRPS}\subseteq\mathscr{RQNPS}\subseteq\mathscr{RSNPS}\subseteq\mathscr{RSRPS}$;

(3°) $\mathscr{LNPS}\cap\mathscr{RNPS}=\mathscr{LRPS}\cap\mathscr{RRPS}=\mathscr{R}^*$.

证　(1°) 我们仅需证明 $\mathscr{LRPS}\subseteq\mathscr{LQNPS}$, 其他包含关系是明显的. 事实上, 设 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$, 且 $p,q,r\in P$. 首先, 若 $p\mathscr{L}q$, 则有 $p\in V(q)$ 和 $pq=p$, $qp=q\in P$. 据引理 1(6°), 有 $p\in V_P(q)$. 据引理 1(3°), 有 $r\in V_P(r)$ 和 $p\in V_P(p)$, 进而据引理 1(5°), 有 $pr\in V_P(rp)\cap V_P(rq)$. 因此, $prp,prq\in P$ 且 $prp\mathscr{R}prq$. 由于 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$, 故 $prp=prq$. 注意到 $rp\mathscr{L}prp=prq\mathscr{L}rq$, 有 $rp\mathscr{L}rq$. 其次, 若 $p\in V_P(q)$, 则 $pq,qp\in P$, $p\mathscr{R}pq$ 且 $qp\mathscr{R}q$. 因为 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$, 故 $p=pq$ 且 $qp=q$. 这表明 $p\mathscr{L}q$, 进而有 $pr\mathscr{L}qr$. 最后, 若 $p\mathscr{R}q$, 则据事实 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$ 可知 $p=q$. 故有 $pr=qr$, 从而有 $pr\mathscr{R}qr$. 这说明 $S(P)\in\mathscr{LQNPS}$.

(2°) 是(1°) 的对偶. (3°) 可由推论 2 立得.

下面给出上述子类的一些刻画. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{PS}$ 的两个子类, $S(P)\in\mathscr{PS}$. $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余 ρ 称为 $\mathscr{Y}$-同余, 若 $S(P)/\rho\in\mathscr{Y}$. $S(P)$ 上最小的 $\mathscr{Y}$-同余记为 $\rho_{\mathscr{Y}}$. $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余 ρ 称为过 $\mathscr{LZB}$ 的, 若关于任意 $e\in E(S)$, 有 $e\rho\in\mathscr{LZB}$, 这里 $\mathscr{LZB}$ 代表左零带的全体. 另一方面, 类似于泛代数理论, 我们称 $\mathscr{PS}$ 的子类

$$\mathscr{LZB}\circ\mathscr{Y}=\{S(P)\in\mathscr{PS}\mid \text{存在 } S(P) \text{ 上的过 } \mathscr{LZB} \text{ 的 } \mathscr{Y}\text{-同余}\}$$

为 $\mathscr{LZB}$ 和 $\mathscr{Y}$ 在 $\mathscr{PS}$ 中的 Malcev 积. 另外, 我们定义

$$\mathscr{X}\vee\mathscr{Y}=\{S(P)\in\mathscr{PS}\mid \rho_{\mathscr{X}}\cap\rho_{\mathscr{Y}}=\iota_S\}$$

这里 ι_S 代表 S 上的相等关系. 若"$\mathbb{U}$" 是 $\mathscr{PS}$ 中满足某些条件的成员, 则记这些成员的全体为 $\mathscr{PS}(\mathbb{U})$.

引理 2　$\mathscr{LRPS}=\mathscr{PS}(\gamma\subseteq\mathscr{L})=\mathscr{LZB}\circ\mathscr{R}^*$.

证　若 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$, $a,b\in S(P)$ 且 $a\gamma b$, 则据引理 1(1°) 有 $V_P(a)=V_P(b)$. 取 $x\in V_P(a)=V_P(b)$. 则 $xa,xb\in P$ 且 $xa\mathscr{R}xb$. 因为 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$, 所以有 $xa=xb$, 这表明 $a\mathscr{L}xa=xb\mathscr{L}b$. 故 $\mathscr{LRPS}\subseteq\mathscr{PS}(\gamma\subseteq\mathscr{L})$.

设 $S(P)\in\mathscr{PS}(\gamma\subseteq\mathscr{L})$ 且 $e\in E(S)$. 据推论 1, $e\gamma$ 是 $S(P)$ 的子带. 由于 $\gamma\subseteq\mathscr{L}$, 故 $e\gamma$ 是左零带. 另一方面, 据推论 3, 有 $S(P)/\gamma\in\mathscr{R}^*$. 这表明 $S(P)\in\mathscr{LZB}\circ\mathscr{R}^*$. 故 $\mathscr{PS}(\gamma\subseteq\mathscr{L})\subseteq\mathscr{LZB}\circ\mathscr{R}^*$.

若 $S(P)\in\mathscr{LZB}\circ\mathscr{R}^*$, 则存在 $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余 ρ, 使得 $S(P)/\rho\in\mathscr{R}^*$, 且关于任意 $e\in E(S)$, $e\rho$ 是左零带. 设 $p,q\in P$ 且 $p\mathscr{R}q$, 则 $p\rho,q\rho\in P\rho$, 且在 $S(P)/\rho$ 中有 $p\rho\mathscr{R}q\rho$. 因为 $P\rho$ 是 $S(P)/\rho$ 的 $\mathscr{P}$-系, 据推论 2, 有 $p\rho=q\rho$. 注意到 $p\rho$ 是左零带, 有 $p\mathscr{L}q$. 这表明 $p\mathscr{H}q$, 从而 $p=q$. 这证明了 $S(P)\in\mathscr{LRPS}$. 故 $\mathscr{LZB}\circ\mathscr{R}^*\subseteq\mathscr{LRPS}$.

引理 3　$\mathscr{LSRPS}=\mathscr{PS}(\gamma\cap\mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}})=\mathscr{LZB}\circ\mathscr{RRPS}$.

证　设 $S(P)\in\mathscr{LSRPS}$. 因为 $\mathscr{L}$ 是右同余, 故 $\gamma\cap\mathscr{L}$ 也是右同余. 设 $a,b,c\in S(P)$ 且 $a\,(\gamma\cap\mathscr{L})\,b$. 据引理 1(1°), 存在 $x\in V_P(a)=V_P(b)$, 使得 $xa=xb\in P$ 且 $ax,bx\in P$, $ax\mathscr{L}bx$. 取 $c_1\in V_P(c)$. 则 $c_1c\in P$. 因为 $S(P)\in\mathscr{LSRPS}$, 有 $(c_1c)(ax)\mathscr{L}(c_1c)bx$. 这表明

$$cax\mathscr{L}(c_1c)(ax)\mathscr{L}(c_1c)bx\mathscr{L}cbx$$

从而

$$ca=caxa\mathscr{L}cb(xa)=cbxb=cb$$

故 $\gamma\cap\mathscr{L}$ 是 $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余.

设 $p(\gamma\cap\mathscr{L}),q(\gamma\cap\mathscr{L})\in P(\gamma\cap\mathscr{L})$, 这里 $p,q\in P$. 若

$$[p(\gamma\cap\mathscr{L})][q(\gamma\cap\mathscr{L})]\in P(\gamma\cap\mathscr{L})$$

则 $(pq)(\gamma\cap\mathscr{L})\in P(\gamma\cap\mathscr{L})$, 从而存在 $r\in P$, 使得 $(pq,r)\in\gamma\cap\mathscr{L}$. 据引理 1(1°) 和(3°), 有 $r\in V_P(r)=V_P(pq)$, 从而据引理 1(3°), 有 $pq\in V_P(r)\subseteq P$. 因为 $S(P)\in\mathscr{PS}$, 有

$$qp\in P\qquad [q(\gamma\cap\mathscr{L})][p(\gamma\cap\mathscr{L})]=(qp)(\gamma\cap\mathscr{L})\in P(\gamma\cap\mathscr{L})$$

这表明 $S(P)/\gamma\cap\mathscr{L}\in\mathscr{PS}$.

若 $p,q\in P$, $p(\gamma\cap\mathscr{L})\mathscr{L}q(\gamma\cap\mathscr{L})$, 则 $(pq,p)\in\gamma\cap\mathscr{L}$. 这表明 $(pq)p=pq$. 另一方面, 据引理 1(1°)

和(3°)，我们有 $p \in V_P(p)=V_P(pq)$，因此 $pq=(pq)p=p(pq)p=p$. 对偶地，$qp=q$. 这表明 $p\mathscr{L}q$. 进一步地，据引理1的(3°)和(6°)，有 $p \in V_P(p) \cap V_P(q)$. 再据引理1的(1°)和(4°)，有 $V_P(p)=V_P(q)$ 和 $(p,q) \in \gamma$. 故 $p(\gamma \cap \mathscr{L})=q(\gamma \cap \mathscr{L})$，从而 $S(P)/(\gamma \cap \mathscr{L}) \in \mathscr{RRPS}$.

设 σ 是 $S(P)$ 上的 $\mathscr{P}$-同余，使得 $S(P)/\sigma \in \mathscr{RRPS}$, $a,b \in S(P)$ 且 $a(\gamma \cap \mathscr{L})b$. 据引理1(1°)，存在 $x \in V_P(a)=V_P(b)$，使得 $xa=xb \in P$，$ax,bx \in P$ 和 $ax\mathscr{L}bx$. 因为 $S(P)/\sigma \in \mathscr{RRPS}$, $(ax)\sigma,(bx)\sigma \in P\sigma$ 和 $(ax)\sigma\mathscr{L}(bx)\sigma$，有 $(ax)\sigma=(bx)\sigma$. 故

$$a\sigma=(axa)\sigma=((ax)\sigma)(a\sigma)=((bx)\sigma)(a\sigma)=(b\sigma)((xa)\sigma)=(bxb)\sigma=b\sigma$$

这表明 $\gamma \cap \mathscr{L} \subseteq \sigma$. 这证明了 $\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}}$. 故

$$\mathscr{LSRPS} \subseteq \mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}})$$

设 $S(P) \in \mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}})$. 因为 $\gamma \cap \mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$，故据推论1知，关于任意 $e \in E(S)$，$e(\gamma \cap \mathscr{L})$ 是左零带. 这表明 $\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}}) \subseteq \mathscr{LZB} \circ \mathscr{RRPS}$.

设 $S(P)/\rho \in \mathscr{RRPS}$，且关于任意 $e \in E(S)$，有 $e\rho \in \mathscr{LZB}$. 设 $p,q,r \in P$ 且 $p\mathscr{L}q$. 则 $p\rho,q\rho \in P\rho$ 且 $p\rho\mathscr{L}q\rho$. 据事实 $S(P)/\rho \in \mathscr{RRPS}$，有 $p\rho=q\rho$. 故 $(rp)\rho=(rq)\rho$. 注意到 $rp,rq \in E(S)$ 和 $(rp)\rho \in \mathscr{LZB}$，有 $rp\mathscr{L}rq$. 这表明 $S(P) \in \mathscr{LSRPS}$. 因此，$\mathscr{LZB} \circ \mathscr{RRPS} \subseteq \mathscr{LSRPS}$.

引理 4 $\mathscr{LSNPS}=\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RNPS}})=\mathscr{LZB} \circ \mathscr{RNPS}$.

证 设 $S(P) \in \mathscr{LSNPS}$. 据引理3，$\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}}$. 为证明 $\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RNPS}}$，只需证 $S(P)/\gamma \cap \mathscr{L} \in \mathscr{RNPS}$. 令 $p(\gamma \cap \mathscr{L}),q(\gamma \cap \mathscr{L}),r(\gamma \cap \mathscr{L}) \in P(\gamma \cap \mathscr{L})$，$p,q,r \in P$ 且 $p(\gamma \cap \mathscr{L})\mathscr{R}q(\gamma \cap \mathscr{L})$. 则 $(pq,q),(qp,p) \in \gamma \cap \mathscr{L}$. 据引理1(1°)，有 $V_P(pq)=V_P(q)$ 和 $V_P(qp)=V_P(p)$. 据引理1(3°)，有 $q \in V_P(q)=V_P(pq)$，进而有 $pq \in V_P(q)$. 容易验证 $pq \in V_P(qp)$. 故

$$pq \in V_P(qp) \cap V_P(q)=V_P(p) \cap V_P(q)$$

从而据引理1(4°)知 $V_P(p)=V_P(q)$. 于是 $(p,q) \in \gamma$ 且 $(pr,qr) \in \gamma$. 另一方面，因为 $p \in V_P(p)=V_P(q)$ 和 $S(P) \in \mathscr{LSNPS}$，有 $pr\mathscr{L}qr$. 这表明 $pr(\gamma \cap \mathscr{L})qr$，从而

$$p(\gamma \cap \mathscr{L})r(\gamma \cap \mathscr{L})=q(\gamma \cap \mathscr{L})r(\gamma \cap \mathscr{L})$$

这说明 $S(P)/(\gamma \cap \mathscr{L}) \in \mathscr{RNPS}$.

事实上，$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RNPS}}) \subseteq \mathscr{LZB} \circ \mathscr{RNPS}$ 可由引理3的证明获得.

设 $S(P) \in \mathscr{LZB} \circ \mathscr{RNPS}$. 则据引理3有 $S(P) \in \mathscr{LSRPS}$. 假设 ρ 是 $S(P)$ 上一 $\mathscr{P}$-同余，使得 $S(P)/\rho \in \mathscr{RNPS}$，且关于任意 $e \in E(S)$，有 $e\rho \in \mathscr{LZB}$. 令 $p,q,r \in P$ 且 $p \in V_P(q)$. 则 $pq,qp \in P$，且在 $S(P)/\rho$ 中有 $(p\rho)\mathscr{R}(pq\rho)$. 因为 $S(P)/\rho \in \mathscr{RNPS}$，有

$$(pr)\rho=(p\rho)(r\rho)=(pq\rho)(r\rho)=(pqr)\rho$$

由于 $pr,pqr \in E(S)$，且关于任意 $e \in E(S)$，有 $e\rho \in \mathscr{LZB}$，有 $(pr)(pqr)=pr$. 这表明

$$(pr)(qr)=(pr)(pqr)(qr)=(pr)(pqrqr)=(pr)(pqr)=pr$$

类似可知 $(qr)(pr)=qr$. 由 $pr,qr \in E(S)$ 可知 $pr\mathscr{L}qr$. 故 $S(P) \in \mathscr{LSNPS}$.

引理 5 $\mathscr{RPS}=\mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RRPS}$, $\mathscr{LQNPS}=\mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RNPS}$, $\mathscr{NPS}=\mathscr{LNPS} \vee \mathscr{RNPS}$.

证 据引理3及其对偶，有

$$\mathscr{RPS}=\mathscr{LSRPS} \cap \mathscr{RSRPS}=\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{R}=\rho_{\mathscr{LRPS}},\ \gamma \cap \mathscr{L}=\rho_{\mathscr{RRPS}})$$

据引理1(2°)，$\mathscr{L} \cap \gamma \cap \mathscr{R}$ 是 S 上的相等关系，从而 $\mathscr{RPS} \subseteq \mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RRPS}$. 反之，设 $S(P) \in \mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RRPS}$. 则 $\rho_{\mathscr{LRPS}} \cap \rho_{\mathscr{RRPS}}$ 是 S 上的相等关系. 容易验证 ψ: $S(P) \longrightarrow \overline{S}(\overline{P})$，$a \longmapsto (a\rho_{\mathscr{LRPS}},\ a\rho_{\mathscr{RRPS}})$ 是 $S(P)$ 到 $\overline{S}(\overline{P})$ 的 $\mathscr{P}$-同构，这里 $\overline{S}=\{(a\rho_{\mathscr{LRPS}},\ a\rho_{\mathscr{RRPS}}) \mid a \in S(P)\}$ 是 $S(P)/\rho_{\mathscr{LRPS}} \times S(P)/\rho_{\mathscr{RRPS}}$ 的子半群且 $\overline{P}=\{(p\rho_{\mathscr{LRPS}},\ p\rho_{\mathscr{RRPS}}) \mid p \in P\}$. 不难验证 $\overline{S}(\overline{P}) \in \mathscr{LSRPS} \cap \mathscr{RSRPS}=\mathscr{RPS}$. 这表明 $S(P) \in \mathscr{RPS}$. 其余两式类似可证.

据引理 2,3,4 和 5，有如下结论：

定理 1　定义 1 中的子类可由表 1 及其对偶来刻画：

表 1　各子类的刻画

子　类	刻画 1	刻画 2
$\mathscr{LSRPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L} = \rho_{\mathscr{RRPS}})$	$\mathscr{LZB} \circ \mathscr{RRPS}$
$\mathscr{LSNPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L} = \rho_{\mathscr{RNPS}})$	$\mathscr{LZB} \circ \mathscr{RNPS}$
$\mathscr{RPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L} = \rho_{\mathscr{RRPS}}, \gamma \cap \mathscr{R} = \rho_{\mathscr{LRPS}})$	$\mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RRPS}$
$\mathscr{LQNPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L} = \rho_{\mathscr{RNPS}}, \gamma \cap \mathscr{R} = \rho_{\mathscr{LRPS}})$	$\mathscr{LRPS} \vee \mathscr{RNPS}$
$\mathscr{NPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \cap \mathscr{L} = \rho_{\mathscr{RNPS}}, \gamma \cap \mathscr{R} = \rho_{\mathscr{LNPS}})$	$\mathscr{LNPS} \vee \mathscr{RNPS}$
$\mathscr{LRPS}$	$\mathscr{PS}(\gamma \subseteq \mathscr{L})$	$\mathscr{LZB} \circ \mathscr{R}^*$

参考文献：

[1] HOWIE J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London：Academic Press，1976.

[2] PETRICH M，REILLY N. Completely Regular Semigroups [M]. Toronto：Wiley，1999.

[3] 李崇娟，王正攀. 密码群并半群上的最小 Abel 群并半群同余 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：9－10.

[4] 喻秉钧，李　丽. 基础逆 Z 半群 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2013，35(8)：1－5.

[5] HE YONG，GUO Yu-qi，SHUM K. Standard Reprensentations of Orthodox Semigroups [J]. Communications in Algebra，2005，33(3)：745－761.

[6] YAMADA M. $\mathscr{P}$-Systems in Regular Semigroups [J]. Semigroup Forum，1982，24(1)：173－178.

[7] YAMADA M，SEN M K. $\mathscr{P}$-Regular Semigroups [J]. Semigroup Forum，1989，39(1)：157－178.

[8] ZHANG Mou-cheng，HE Yong. The Structure of $\mathscr{P}$-Regular Semigroups [J]. Semigroup Forum，1997，54(1)：278－291.

A Classification of Strongly $\mathscr{P}$-Regular Semigroups

WANG Shou-feng

School of Mathematics，Yunnan Normal University，Kunming 650500，China

Abstract：It is well known that orthodox semigroups can be classified by their idempotent element sets. Similar to the case of orthodox semigroups，$\mathscr{P}$-regular semigroups can also be classified by their projective sets. A classification of strongly $\mathscr{P}$-regular semigroups is given in term of their projective sets. Moreover，some subclasses of strongly $\mathscr{P}$-regular semigroups are characterized.

Key words：strongly $\mathscr{P}$-regular semigroup；projective set；classification

责任编辑　廖　坤