第 36 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2014 年 8 月
Vol. 36　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.08.012

强和强泛 Gorenstein FP-内射模[①]

陈文静，　杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 研究了强 Gorenstein FP-内射模，引入了强泛 Gorenstein FP-内射模的概念，证明了弱 Gorenstein FP-内射模是强泛 Gorenstein FP-内射模的直和项.

关　键　词： 强 Gorenstein FP-内射模；强泛 Gorenstein FP-内射模；内射模

中图分类号： O153.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2014)8-0075-04

Gorenstein 同调代数倍受研究者们的青睐[1-3]. 强 Gorenstein FP-内射模的概念于 2013 年在文献[4]中被引入. 于是本文研究了强 Gorenstein FP-内射模和强泛 Gorenstein FP-内射模. 除非特别申明，R 是具有单位元的结合环，所有涉及的模均是酉模. 对未作解释的标记和概念，参见文献[5]. 称左 R-模 M 是 FP-内射的[6]，如果对任意有限表示左 R-模 P，$\mathrm{Ext}_R^1(P, M)=0$.

命题 1　设 R 是左凝聚的右 IF-环，$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$ 是右 R-模的短正合列. 如果 F 是 FP-内射右 R-模，那么 N 是强 Gorenstein FP-内射右 R-模当且仅当 M 是强 Gorenstein FP-内射右 R-模.

证　因为 R 是右 IF-环，F 是 FP-内射右 R-模，所以 F 是平坦右 R-模. 又因为 R 是左凝聚环，所以强 Gorenstein FP-内射右 R-模类与强 Gorenstein 平坦右 R-模类是相同的. 由文献[1]定理 2.6，N 是强 Gorenstein 平坦右 R-模当且仅当 M 是强 Gorenstein 平坦右 R-模. 因此 N 是强 Gorenstein FP-内射右 R-模当且仅当 M 是强 Gorenstein FP-内射右 R-模.

命题 2　设 R 是左凝聚的右 IF-环，$0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ 是左 R-模的短正合列. 如果 Q 是投射左 R-模且 $\mathrm{Ext}_R^1(N, Q)=0$，那么 N 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 M 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模.

证　必要性. 设 N 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模. 因为 R 是左凝聚的右 IF-环，所以由文献[7]定理 3.8，R 是左 FP-自内射环. 于是由文献[2]定理 3.2，Q 是 FP-内射左 R-模，进而 $Q \oplus N$ 是强 Gorenstein FP-内射的. 因为 $\mathrm{Ext}_R^1(N, Q)=0$，所以 M 是强 Gorenstein FP-内射的.

充分性. 设 M 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模. 因为 $\mathrm{Ext}_R^1(N, Q)=0$，所以 $M \cong Q \oplus N$. 因此 $Q \oplus N$ 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模. 由文献[4]命题 2.8，存在左 R-模的短正合列 $0 \longrightarrow Q \oplus N \longrightarrow E \longrightarrow Q \oplus N \longrightarrow 0$，其中 E 是 FP-内射左 R-模. 考虑下面拉回：

① 收稿日期：2013-10-30
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11261050).
作者简介：陈文静(1989-)，女，甘肃天水人，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Q\oplus N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q\oplus N \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & Q\oplus N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 Q 是投射的，所以短正合列 $0 \longrightarrow Q' \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ 是可裂的，即 $E \cong Q' \oplus Q$. 又因为 E 是 FP -内射左 R -模，所以由文献[8] 引理 2.1，Q' 是 FP -内射左 R -模. 考虑下面推出：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q\oplus N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 Q 和 Q' 是 FP -内射左 R -模，R 是左凝聚环，所以 Q'' 是 FP -内射的. 因为 R 是左凝聚环，所以由文献[4] 推论 2.9，N 是强 Gorenstein FP -内射左 R -模.

定义 1 称左 R -模 M 是强泛 Gorenstein FP -内射模，如果存在一个 FP -内射左 R -模的正合列

$$\mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(f)$. 称正合列 $\mathbf{E}$ 为 M 的强泛完全 FP -内射分解.

注 1 (1°) 强 Gorenstein FP -内射模是强泛 Gorenstein FP -内射模；

(2°) 强泛 Gorenstein FP -内射模是弱 Gorenstein FP -内射模；

(3°) 若 $\mathbf{L} = \cdots \longrightarrow L \longrightarrow L \longrightarrow L \longrightarrow \cdots$ 是强泛完全 FP -内射分解，则由对称性可知，$\mathbf{L}$ 的所有的核、像和上核都是强泛 Gorenstein FP -内射模.

命题 3 设 $(M_i)_{i\in I}$ 是一簇强泛 Gorenstein FP -内射模. 则 $\prod\limits_{i\in I} M_i$ 和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是强泛 Gorenstein FP -内射模.

证 直和与直积情形的证明是类似的. 设 $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$. 对任意的 $i \in I$，因为 M_i 是强泛 Gorenstein FP -内射模，所以存在一个 FP -内射模的正合列

$$\mathbf{E}_i = \cdots \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{f_i} \cdots$$

使得 $M_i \cong \mathrm{Im}(f_i)$. 令

$$\mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} E_i \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} E_i \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} E_i \xrightarrow{f} \cdots$$

显然 $\mathbf{E}$ 是正合的且 $M \cong \mathrm{Im}(f)$. 因为 $\prod\limits_{i\in I} E_i$ 是 FP -内射模，所以命题 3 得证.

命题 4 设 R 是任意环. 则以下条件等价：

(1°) M 是强泛 Gorenstein FP -内射左 R -模；

(2°) 存在一个左 R -模的正合列

$$\mathbf{X} = \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

其中 E 是 FP-内射左 R-模；

(3°) 存在一个左 R-模的短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 E 是 FP-内射左 R-模.

证　(1°)⟹(2°) 由定义 1，结论显然.

(2°)⟹(3°)　假设(2°)成立. 则存在一个左 R-模的正合列

$$\mathbf{X} = \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

显然 $\ker(f) = \mathrm{Im}(f) = M$. 于是 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是正合的，其中 E 是 FP-内射的.

(3°)⟹(1°)　因为存在左 R-模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 E 是 FP-内射的，所以

$$\mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \cdots$$

是 FP-内射左 R-模的正合列，使得 $M \cong \mathrm{Im}(f)$. 因此 M 是强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模.

定理 1　每个弱 Gorenstein FP-内射模是强泛 Gorenstein FP-内射模的直和项.

证　设 M 是弱 Gorenstein FP-内射左 R-模. 则存在 FP-内射左 R-模的正合列

$$\mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{d_2^E} E_1 \xrightarrow{d_1^E} E_0 \xrightarrow{d_0^E} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}^E} \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(d_0^E)$. 对任意的 $m \in \mathbb{Z}$，通过增加指数 m，由 $\mathbf{E}$ 得到的正合列定义为 $\sum^m E$，对任意的 $i \in \mathbb{Z}$，$(\sum^m E)_i = E_{i-m}$ 且 $d_i^{\sum^m E} = d_{i-m}^E$. $\bigoplus E_i$ 是 FP-内射左 R-模. 考虑正合列

$$\mathbf{F} = \bigoplus \sum{}^m \mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{\oplus d_i^E} F = \bigoplus E_i \xrightarrow{\oplus d_i^E} F = \bigoplus E_i \xrightarrow{\oplus d_i^E} F = \bigoplus E_i \xrightarrow{\oplus d_i^E} F = \bigoplus E_i \xrightarrow{\oplus d_i^E} \cdots$$

显然 $\mathrm{Im}(\bigoplus d_i)$ 是强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模. 因为 $\mathrm{Im}(\bigoplus d_i) \cong \bigoplus \mathrm{Im}\, d_i$，所以定理 1 得证.

命题 5　设 R 是左凝聚环. 则以下条件成立：

(1°) M 是强 Gorenstein FP-内射左 R-模当且仅当 M 是强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模；

(2°) 弱 Gorenstein FP-内射左 R-模是强 Gorenstein FP-内射左 R-模的直和项.

证　由文献[4]定理 2.7 和本文定理 1 可证.

注 2　由命题 5 可知，命题 1 和命题 2 对强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模也成立.

命题 6　设 R 是双边凝聚环. 则以下条件等价：

(1°) R 是 FC-环；

(2°) 每个强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模是强 Gorenstein 平坦模；

(3°) 每个强 Gorenstein 内射左 R-模是强 Gorenstein 平坦模；

(4°) 每个 FP-内射左 R-模是强 Gorenstein 平坦模；

(5°) 每个内射左 R-模是强 Gorenstein 平坦模；

(6°) 每个强 Gorenstein 平坦左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射模；

(7°) 每个平坦左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射模；

(8°) 每个强 Gorenstein 投射左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射模；

(9°) 每个投射左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射模.

证　由命题 5 和文献[4]定理 2.14 可证.

命题 7　FP-内射左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模. 反之，当 R 是左凝聚环且 $l.\mathrm{FP}-\dim(R) < \infty$ 时，强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模是 FP-内射左 R-模.

证　由注 1，FP-内射左 R-模是强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模. 设 R 是左凝聚环，且 $l.\mathrm{FP}-\dim(R) = m < \infty$. 下对 m 进行数学归纳. 当 $m = 0$ 时，任意左 R-模是 FP-内射的，结论显然. 当 $m \geqslant 1$ 时，若 M 是

强泛 Gorenstein FP-内射左 R-模，则由命题4，存在一个左 R-模的正合列 $\cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中每个 $E_i = E$ 是 FP-内射左 R-模. 设 $L \cong \mathrm{Im}(E_m \longrightarrow E_{m-1})$，则 $0 \longrightarrow L \longrightarrow E_{m-1} \longrightarrow E_{m-2} \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是正合的. 因为 $\mathrm{FP}-id_R(L) \leqslant m$，$R$ 是左凝聚环，所以由文献[6]引理3.1知，M 是 FP-内射左 R-模.

由命题7得到推论1：

推论1　设 R 是左凝聚环，且 $l.\mathrm{FP}-\dim(R) < \infty$，则 FP-内射模类、强 Gorenstein FP-内射模类和强泛 Gorenstein FP-内射模类是相同的.

参考文献：

[1] YANG Xiao-yan，LIU Zhong-kui. Strongly Gorenstein Projective，Injective and Flat Modules [J]. J Algebra，2008，320(7)：2659－2674.

[2] GAO Zeng-hui，WANG Fang-gui. Coherent Rings and Gorenstein FP-Injective Modules [J]. Comm Algebra，2012，40：1669－1679.

[3] GAO Zeng-hui. Weak Gorenstein Projective，Injective and Flat Modules [J]. J Algebra Appl，2013，12(2)：3841－3858.

[4] GAO Zeng-hui. On Strongly Gorenstein FP-Injective Modules [J]. Comm Algebra，2013，41：3035－3044.

[5] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York：Academic Press，1979.

[6] STENSTÖM B. Coherent Rings and FP-Injective Modules [J]. J Lond Math Soc，1970(2)：323－329.

[7] DING Nan-qing，CHEN Jian-long. The Flat Dimension of Injective Modules [J]. Manu Math，1993，78：165－177.

[8] JAIN S. Flat and FP-Injectivity [J]. Proc Amer Math Soc，1973，41：437－442.

Strongly and Strongly Universal Gorenstein FP-Injective Modules

CHEN Wen-jing，　YANG Xiao-yan

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Strongly Gorenstein FP-injective modules are investigated，the concept of "strongly universal Gorenstein FP-injective modules" is introduced，and it is proved that a weak Gorenstein FP-injective module is a direct summand of a strongly universal Gorenstein FP-injective module.

Key words：strongly Gorenstein FP-injective module；strongly universal Gorenstein FP-injective module；injective module

责任编辑　廖　坤