DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.08.013

多轮图和多齿轮图的 k -优美性[①]

王　涛[1]，　孙彩云[1]，　李德明[2]

1. 华北科技学院 基础部，河北 三河 065201；2. 首都师范大学 数学系，北京 100048

摘要：对多轮图 $W_{m_1}^{(t)}$ 和多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 的 k -优美性进行研究. 证明了：$m_1 = 2k+1$ 时，图 $W_{m_1}^{(t)}$ 是 k -强优美图；当 m_t 为偶数时，对任意自然数 $k \geqslant 1$，图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k -优美图；当 m_t 为奇数时，对任意自然数 $k \geqslant 3$，图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k -优美图. 其中图 $W_{m_1}^{(t)}$ 是由 t 个轮 $W_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的中心顶点合并后构成的连通图，图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是由 t 个齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的中心顶点合并后构成的连通图.

关　键　词：图；优美图；k -优美图

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)8-0079-04

优美图是图论中极有趣的重要内容，有着较好的应用价值和广阔的研究前景. 1972 年，文献[1] 给出了优美图的定义. 随后，k -优美图、k -强优美图等定义相继给出. 优美标号问题在编码设计、通讯网络、雷达脉冲等领域有重要应用. 关于优美性的研究结论可见文献[2－5].

本文所讨论的图 $G(V, E)$ 均为简单无向图，设 $V=V(G)$ 为图 G 的顶点集，$E=E(G)$ 为图 G 的边集，$|E|$ 为图 G 的边数. P_m 为有 m 个顶点的路，C_m 为有 m 个顶点的圈. $G_1 \vee G_2$ 为图 G_1 与 G_2 的联图，其顶点集合

$$V(G_1 \vee G_2)=V(G_1) \cup V(G_2)$$

边集合

$$E(G_1 \vee G_2)=E(G_1) \cup E(G_2) \cup F$$

其中

$$F=\{xy: x \in V(G_1),\ y \in V(G_2)\}$$

联图 $P_1 \vee C_m$ 称为轮，记作 W_m，其中 P_1 的顶点称为 W_m 的中心. 在轮 W_m 的 C_m 上，每相邻点之间加入一个顶点所得到的图称为齿轮图，记作 $\widetilde{W}_m$. 本文约定：多轮图 $W_{m_1}^{(t)}$ 是由 t 个轮 $W_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的中心顶点合并后构成的连通图，其中 $m_{i+1}=2m_i+1$，$i=1,2,\cdots,t-1$. 多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是由 t 个齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的中心顶点合并后构成的连通图，其中 $m_{i+1} \geqslant 2m_i+2$，$i=1,2,\cdots,t-1$. $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数. $[a, b]$ 表示不小于 a 且不大于 b 的所有整数.

定义 1　设图 $G=(V, E)$，k 为正整数，如果存在一个单射 $f: V \longrightarrow \{0, 1, \cdots, |E|+k-1\}$，使得对所有的边 $uv \in E$，由 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \longrightarrow \{k, k+1, \cdots, |E|+k-1\}$，则称图 G 是 k -优美图，f 是 G 的一个 k -优美标号. 1 -优美图也称优美图，1 -优美标号也称优美标号.

定义 2　设图 $G=(V, E)$，k 为正整数，如果存在单射 $f: V \longrightarrow \{0, k, \cdots, |E|+k-1\}$，使得对所有的边 $uv \in E$，由 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \longrightarrow \{k, k+1, \cdots, |E|+k-1\}$，则称图 G 是 k -强优美图，f 是 G 的一个 k -强优美标号.

① 收稿日期：2012-09-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10201022)；中央高校基本科研业务费资助(2011B019，3142013104，3142014037)；华北科技学院应用数学重点学科资助(HKXJZD201402).
作者简介：王　涛(1972-)，男，河北迁安人，副教授，主要从事图论的研究.

引理 1 若多轮图 $W_m^{(t)}$ 为 k-强优美图，且 $|E(W_m^{(t)})|=e$，则有 $e>k$.

证 （反证法） 假设结论不成立，即图 $W_m^{(t)}$ 为 k-强优美图，则有 $e\leqslant k$. 因为 $W_m^{(t)}$ 为 k-强优美图，所以存在单射 $f: V\longrightarrow\{0, k, \cdots, |E|+k-1\}$，使得导出映射 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 是 $E\longrightarrow\{k, k+1, \cdots, |E|+k-1\}$ 的双射. 当 $f(u)\neq 0$，$f(v)\neq 0$ 时，有

$$f'(uv)=|f(u)-f(v)|\leqslant|e+k-1-k|=e-1<k$$

矛盾. 从而假设不成立，结论成立.

引理 2 当 $k>3$ 时，若多轮图 $W_m^{(t)}(m>3)$ 为 k-强优美图，则图 $W_m^{(t)}$ 的中心顶点 k-强优美标号为 0.

证 设 $V=V(W_m^{(t)})$，$E=E(W_m^{(t)})$，$|E|=e$. 因为 $W_m^{(t)}(m>3)$ 为 k-强优美图，所以存在单射 f: $V\longrightarrow\{0, k, \cdots, e+k-1\}$，使得导出映射 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 是 $E\longrightarrow\{k, k+1, \cdots, e+k-1\}$ 的双射. 由引理 1 知

$$A=\{e, e+1, \cdots, e+k-1\}\subseteq\{k, k+1, \cdots, e+k-1\}$$

若 $f'(uv)\in A$，则必有 $f(u)=0$ 或 $f(v)=0$. 又因为 $|A|=k>3$，而除 $W_m^{(t)}$ 的中心顶点外，其余的顶点度都不大于 3. 所以，图 $W_m^{(t)}$ 的中心顶点 k-强优美标号为 0.

定理 1 若轮形图 W_n 为 k-强优美图，则 $n\geqslant 2k$.

证 W_n 的顶点依次记为 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中 x_0 为轮 W_n 的中心.

1）当 $k=1$ 时，结论显然成立.

2）当 $k=2$ 时，若 W_n 为 2-强优美图，则 $n\geqslant 4$.

当 $n=3$ 时，W_3 不是 2-强优美图. 假设 W_3 是 2-强优美图，则存在单射 f: $V(W_3)\longrightarrow\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，使得导出映射 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 是 $E\longrightarrow\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 的双射，由此可知 W_3 必有 3 个顶点标号为 0,6,7，且标号为 6,7 的两个顶点均与标号为 0 的顶点相邻，由 W_3 的结构易知，标号为 6，7 的两个顶点也相邻，导出的边值为 1，矛盾.

3）当 $k=3$ 时，若 W_n 为 3-强优美图，则 $n\geqslant 6$.

当 $n=3,4$ 时，类似地，我们仅证明：当 $n=5$ 时，W_n 不是 3-强优美图. 假设 W_n 是 3-强优美图，则存在单射 f: $V(W_5)\longrightarrow\{0, 3, 4, \cdots, 11, 12\}$，使得导出映射 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$ 是 $E\longrightarrow\{3, 4, \cdots, 11, 12\}$ 的双射，由此可知 W_5 必有 4 个顶点标号为 0,10,11,12，且标号为 10,11,12 的 3 个顶点均与标号为 0 的顶点相邻，由 W_5 的结构易知，标号为 10,11,12 的 3 个顶点至少有 2 个顶点相邻，相邻顶点导出的边值不大于 2，矛盾.

4）当 $k>3$ 时，由引理 2 知 W_n 的中心顶点 x_0 的标号为 0. 又由引理 1 得

$$A=\{e, e+1, \cdots, e+k-1\}\subseteq\{k, k+1, \cdots, e+k-1\}$$

因为 $|A|=k>3$，且具有 A 中边标号的边的一个端点必为 x_0，另外 k 个端点必为 C_n 中的点，则当 $n<2k$ 时，必有一条边 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|\leqslant|e+k-1-e|<k$. 所以 W_n 不为 k-强优美图.

综上所述，若 W_n 为 k-强优美图，则 $n\geqslant 2k$.

定理 2 对任意自然数 $k\geqslant 1$，$t\geqslant 1$，当 $m_1=2k+1$ 时，多轮图 $W_{m_1}^{(t)}$ 是 k-强优美图.

证 设 $V(W_{m_i})=\{x_0; x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,m_i}\}$，$i=1,2,\cdots,t$. $E=E(W_{m_1}^{(t)})$，$|E|=e$.

当 $m_1=2k+1$，且 $m_{i+1}=2m_i+1$ $(i=1,2,\cdots,t-1)$ 时，定义多轮图 $W_{m_1}^{(t)}$ 的顶点标号 f 为

轮 W_{m_1} 的顶点标号为：

$$f(x_0)=0 \qquad f(x_{1,i})=e+k-1-\frac{i-1}{2} \qquad i=1,3,5,\cdots,m_1$$

$$f(x_{1,i})=k+\frac{i}{2} \qquad i=2,4,6,\cdots,m_1-1$$

轮 $W_{m_t}(t\geqslant 2)$ 的顶点标号为

$$f(x_{t,i})=f(x_{t-1,1})-\frac{3}{2}m_{t-1}+1-\frac{i}{2} \qquad i=1,3,5,\cdots,m_t$$

$$f(x_{t,i})=m_{t-1}+\frac{i}{2} \qquad i=2,4,6,\cdots,m_t-1$$

下面我们验证标号 f 是图 $W_{m_1}^{(t)}$ 的 k-强优美标号.

因为

$$f(x_0)=f(x_{1,2}), f(x_{1,4}), \cdots, f(x_{1,m_1-1}), f(x_{2,2}), f(x_{2,4}), \cdots, f(x_{2,m_2-1}),$$

$$\cdots, f(x_{t,2}), f(x_{t,4}), \cdots, f(x_{t,m_t-1}), f(x_{t,m_t}), f(x_{t,m_t-2}), f(x_{t,m_t-4}), \cdots, f(x_{t,1}),$$
$$f(x_{t-1,m_{t-1}}), f(x_{t-1,m_{t-1}-2}), f(x_{t-1,m_{t-1}-4}), \cdots, f(x_{t-1,1}), \cdots,$$
$$f(x_{1,m_1}), f(x_{1,m_1-2}), f(x_{1,m_1-4}), \cdots, f(x_{1,1}) = e+k-1$$

是严格单调递增的，故映射 $f: V \longrightarrow \{0, k+1, k+2, \cdots, e+k-1\}$ 是单射.

对所有的边 $uv \in E$，设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$，则轮形图 W_{m_t} 由 f' 导出的边标号集 E_i 为：

$$E_i = [a_i, b_i] \cup [c_i, d_i]$$

其中 $a_1 = k$，$b_i = a_i + \frac{1}{2}(m_i - 1)$，$a_{i+1} = b_i + 1$，$d_1 = e + k - 1$，$c_i = d_i - \frac{3}{2}(m_i - 1)$，$d_{i+1} = c_i - 1$.

容易计算

$$\bigcap_{i=1}^{t} E_i = \varnothing \qquad \bigcup_{i=1}^{t} E_i = [k, e+k-1]$$

所以 $f': E \longrightarrow \{k, k+1, \cdots, e+k-1\}$ 是双射.

综上所述，f 是 $W_{m_1}^{(t)}$ 的 k-强优美标号.

定理 3　对任意自然数 $t \geqslant 1$，对多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 有：

(i) 当 m_t 为偶数时，对任意自然数 $k \geqslant 1$，多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k-优美图；

(ii) 当 m_t 为奇数时，对任意自然数 $k \geqslant 3$，多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k-优美图.

证　设齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的中心点为 x_0，与中心点相邻的点依次记为 $x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,m_i}(i=1,2,\cdots,t)$，其余的与 $x_{i,1}, x_{i,2}, \cdots, x_{i,m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 相邻的点记为 $y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,m_i}(i=1,2,\cdots,t)$

$$E_i = E(\widetilde{W}_{m_i}) \qquad |E_i| = 3m_i = e_i \qquad \sum_{i=1}^{t} e_i = e$$

当 $m_{i+1} \geqslant 2m_i + 2\ (i=1,2,\cdots,t-1)$ 时，我们定义第 i 个齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的顶点标号 f 为：

当 m_i 为偶数时，齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}$ 的顶点标号为：

$$f(x_0) = 0 \qquad f(x_{i,j}) = \sum_{n=i}^{t} e_n + k - j \qquad j = 1, 2, \cdots, m_i$$
$$f(y_{i,j}) = m_i - 1 + j \qquad j = 1, 2, \cdots, \frac{m_i}{2}$$
$$f(y_{i,j}) = m_i + j \qquad j = \frac{m_i}{2} + 1, \frac{m_i}{2} + 2, \cdots, m_i$$

当 m_i 为奇数时，齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}$ 的顶点标号为：

$$f(x_0) = 0 \qquad f(x_{i,j}) = \sum_{n=i}^{t} e_n + k - j \qquad j = 1, 2, \cdots, m_i - 1$$
$$f(x_{i,m_i}) = \sum_{n=i}^{t} e_n + k - 1 - m_i \qquad f(y_{i,m_i}) = m_i - 1 \qquad f(y_{i,m_i-1}) = m_i$$
$$f(y_{i,j}) = m_i + j \qquad j = 1, 2, \cdots, \frac{m_i - 3}{2}$$
$$f(y_{i,j}) = m_i + 3 + j \qquad j = \frac{m_i - 1}{2}, \frac{m_i + 1}{2}, \cdots, m_i - 2$$

下面我们验证标号 f 是多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 的 k-优美标号：

对第 i 个齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$，当 m_i 为偶数时，有

$$f(x_0) = f(x_{i,1}) > f(x_{i,2}) > \cdots > f(x_{i,m_1}) =$$
$$f(y_{i,m_i}) > f(y_{i,m_i-1}) > \cdots > f(y_{i,1}) = m_i$$

对第 i 个齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1, 2, \cdots, t)$，当 m_i 为奇数时，有

$$f(x_0) = f(x_{i,1}) > f(x_{i,2}) > \cdots > f(x_{i,m_1}) =$$
$$f(y_{i,m_i-2}) > f(y_{i,m_i-3}) > \cdots > f(y_{i,1}) > f(y_{i,m_i-1}) > f(y_{i,m_i}) = m_i - 1$$

由 $e_i = 3m_i$ 可得

$$\sum_{n=1}^{t} e_n + k - 1 = f(x_{1,1}) > f(x_{1,2}) > \cdots > f(x_{1,m_1}) > f(x_{2,1}) >$$

$$f(x_{2,2}) > \cdots > f(x_{2,m_2}) > \cdots > f(x_{t,1}) > f(x_{t,2}) > \cdots > f(x_t, m_t)$$

由 $m_{i+1} \geqslant 2m_i + 2$ 可得

$$\max\{f(y_{i,j}): j=1,2,\cdots,m_i\} < \min\{f(y_{i+1,j}): j=1,2,\cdots,m_{i+1}\}$$

当 m_t 为偶数时，对任意自然数 $k \geqslant 1$ 有

$$2m_t + k = f(x_t, m_t) > \max\{f(y_{t,j}): j=1,2,\cdots,m_i\} = 2m_t$$

当 m_t 为奇数时，对自然数 $k \geqslant 3$ 有

$$2m_t + k - 1 = f(x_t, m_t) > \max\{f(y_{t,j}): j=1,2,\cdots,m_i\} = 2m_t + 1$$

故映射 $f: V \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, e+k-1\}$ 是单射.

对所有的边 $uv \in E$，设 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$，则齿轮图 $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 由 f' 导出的边标号集 E'_i 为

$$E'_1 = [e - e_1 + k,\ e + k - 1] \qquad E'_i = [e - \sum_{n=1}^{i} e_n + k,\ e - \sum_{n=1}^{i-1} e_n + k - 1] \qquad i = 2,3,\cdots,t$$

易知

$$\bigcap_{i=1}^{t} E'_i = \varnothing \qquad \bigcup_{i=1}^{t} E'_i = [k,\ e+k-1]$$

所以 $f': E \longrightarrow \{k, k+1, \cdots, e+k-1\}$ 是双射.

综上所述，f 是多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 的 k-优美标号.

容易看出，由定理3给出的顶点标号，除中心点 x_0 的标号以外，其余顶点的最小标号不小于 $m_1 - 1$. 因此，可得：

推论 1 (i) 当 m_t 为偶数，$1 \leqslant k \leqslant m_1 - 1$ 时，多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k-强优美图；

(ii) 当 m_t 为奇数，$3 \leqslant k \leqslant m_1 - 1$ 时，多齿轮图 $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ 是 k-强优美图.

参考文献：

[1] GOLOMB S W. How to Number a Graph, Graph Theory and Computing [M]. New York: Academic Press, 1972: 23-37.

[2] 程 辉，刘文娟，姚 兵. 具有完美匹配的对虾树是强优美树 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(4)：89-92.

[3] 于艳华，王文祥，张昆龙. k-优美图与优美图 G_{k-1} 的优美性研究 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(5)：1-5.

[4] 王 涛，刘海生，李德明. 和轮相关图的优美性 [J]. 中山大学学报：自然科学版，2011，50(6)：16-19.

[5] 王 涛，王 清，李德明. 非连通图 $W_m^{(k)} \cup G$ 的优美性 [J]. 合肥工业大学学报：自然科学版，2012，35(7)：987-990.

k-Gracefulness of Multiwheel Graphs and Multigear Graphs

WANG Tao[1], SUN Cai-yun[1], LI De-ming[2]

1. *Department of Basic Courses, North China Institute of Science and Technology, Sanhe Hebei 065201, China;*
2. *Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100048, China*

Abstract: In this paper, we study the k-gracefulness of graphs $W_{m_1}^{(t)}$ and $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$. We show that for any natural number t, which is not less than one, when $m_1 = 2k+1$, the graphs $W_{m_1}^{(t)}$ are k-strong graceful. If m_t is even, the graphs $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ are k-graceful for any natural number k, which is not less than one. If m_t is odd, the graphs $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ are k-graceful for any natural number k, which is greater than or equal to three, where $W_{m_1}^{(t)}$ is a connected graph by identifying the central vertices of wheel $W_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$ and $\widetilde{W}_{m_1}^{(t)}$ is a connected graph by identifying the central vertices of $\widetilde{W}_{m_i}(i=1,2,\cdots,t)$.

Key words: graph; graceful graph; k-graceful graph

责任编辑 廖 坤