

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.08.018

平面 Shephard 问题的一类反例^①

李泽清¹, 罗 森², 曾春娜³, 徐文学⁴

1. 毕节学院 数学与计算机科学学院, 贵州 毕节 551700; 2. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院, 贵阳 550001;
3. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331; 4. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 利用常宽等腰梯形和椭圆举出平面上 Shephard 问题的一类精确反例, 利用圆与 Reuleaux 三角形比较的经典反例为所得结论的特殊反例.

关键词: 常宽凸集; 常宽等腰梯形; 椭圆; Shephard 问题

中图分类号: O186.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2014)8-0101-05

1964 年, Shephard 提出一个著名的关于 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 中两个凸体在超平面上的投影体的体积大小与凸体本身体积大小之间关系的问题^[1]. 即: 设 K_1, K_2 为 \mathbb{R}^n 中的两个凸体, 如果对于任意的 $u \in S^{n-1}$ (S^{n-1} 为 $n-1$ 维单位球面), 若有

$$V_{n-1}(K_1 | u^\perp) \geq V_{n-1}(K_2 | u^\perp)$$

是否必有

$$V(K_1) \geq V(K_2)$$

其中 $V_{n-1}(K_i | u^\perp)$ ($i=1, 2$) 为凸体 K_i 在与单位方向 u 垂直的 $n-1$ 维超平面上正交投影体的 $n-1$ 维体积, $V(K_i)$ 为凸体 K_i 的体积.

关于 Shephard 问题的研究有很丰富的结果. 文献[2-3]详细讨论了当 K_1, K_2 为 \mathbb{R}^n 中两个中心对称的凸体时的 Shephard 问题: 当 $n=2$ 时, 在欧氏平面上该问题对两中心对称的凸体是正确的; 但当 $n=3$ 时, 文献[2]利用一特殊双锥和球举出该问题的一个精确反例; 当 $n \geq 3$ 时, 人们已能用变分法举出各种反例, 但在适当的条件限制下该问题是正确的. 当 K_1, K_2 为 \mathbb{R}^2 中两个不全为中心对称的凸体时, 人们用 Reuleaux 三角形和圆比较, 举出平面上两个不全为中心对称的凸体关于 Shephard 问题的反例(参见文献[2]).

本文研究了平面上的 Shephard 问题, 利用文献[4]中构造的新的常宽凸集——等腰常宽梯形和椭圆, 我们举出了非对称 Shephard 问题的一类反例. 即存在平面上两个凸集 K_i ($i=1, 2$), 满足

$$V_1(K_1 | u^\perp) > V_1(K_2 | u^\perp) \quad u \in S^1$$

而

$$V(K_1) < V(K_2)$$

1 预备知识

欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的点集 K 称为凸集, 若对于 $x, y \in K$ 及 $0 \leq \lambda \leq 1$, 恒有

① 收稿日期: 2013-11-19

基金项目: 贵州省科学技术基金资助项目(2012gzz10256); 国家自然科学基金专项基金资助项目(11326073); 贵州省科学技术基金资助项目(黔科合 J 字 LKS[2011]16); 重庆市教委资助项目(KJ130614).

作者简介: 李泽清(1962-), 男, 贵州毕节人, 副教授, 主要从事几何学与几何不等式的研究.

通信作者: 曾春娜, 副教授.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

在平面直角坐标系 XOY 中, 任意一条直线 G 可用原点到它的距离 p 和从 X 正半轴到其法线的夹角 ϕ 来确定, 这样直线 G 的方程 $G(p, \phi)$ 为

$$x \cos \phi + y \sin \phi - p = 0 \quad 0 \leq p < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi$$

当直线 G 过原点时, $p = 0$.

设 K 为有界闭凸集, 它沿 ϕ 方向的支持函数定义为

$$p = \sup \{ p_1 : G(p_1, \phi) \cap K \neq \emptyset \} \quad (1)$$

与(1)式中 p 相应的直线 $G(p, \phi)$ 称为 K 沿 ϕ 方向的支持线, 支持线把平面分成两个部分, 使 K 完全包含在其中的一个半平面内. 支持函数在积分几何与凸几何中占有非常重要的地位, 凸集的一些基本量能用它来表示.

凸集 K 的宽度函数定义为

$$\omega(\phi) = p(\phi) + p(\phi + \pi) \quad (2)$$

由(2)式可见, $\omega(\phi)$ 是对应于方向 ϕ 和 $\phi + \pi$ 的平行支持线间的距离, 称之为凸集 K 沿 ϕ 方向的宽度. 若 $\omega(\phi) \equiv d$ (常数), 则称 K 为常宽凸集, 其边界曲线 K 称为常宽曲线.

显然圆是常宽凸集. 德国工程师 Reuleaux 在 1876 年发现了不是圆的常宽凸集——Reuleaux 三角形, 其构造为: 在等边三角形 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 中分别以 A_1, A_2, A_3 为圆心, $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$ 为半径, 作弧 $\widehat{A_2 A_3}, \widehat{A_3 A_1}, \widehat{A_1 A_2}$, 由这 3 段圆弧围成的凸域是非圆的常宽凸集, 称为 Reuleaux 三角形. 然后类似地又由等边 $(2n + 1) (n \geq 2)$ 边形的每个顶点向对边作圆弧, 构造出非圆的常宽凸集, 即 Reuleaux 多边形. 著名的 Blaschke-Lebesgue 定理说明: 在所有宽度为 $2d$ 的平面常宽凸集中, Reuleaux 三角形的面积最小. Blaschke^[5] 和 Lebesgue^[6-7] 首先给出该定理的证明, 后来数学家们又给出一些精彩的证明^[8-10].

2 Shephard 问题的一类反例

文献[4]利用对角线等于底边长的等腰梯形构造了一类新的常宽凸集——常宽等腰梯形(如图 1 所示).

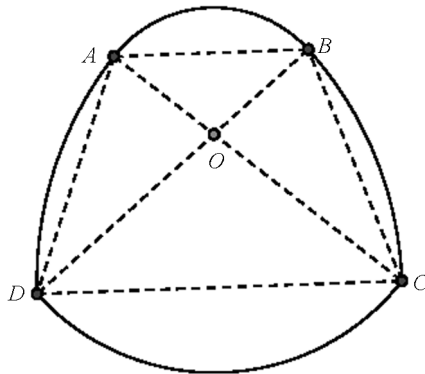


图 1 常宽等腰梯形

在等腰梯形 $ABCD$ 中, 设 $|AC| = |BD| = |CD| = 2d$, AC 与 BD 相交于点 O , 则:

- 以 O 为圆心, 分别以 $|OA|$ 为半径作弧 \widehat{AB} , 以 $|OD|$ 为半径作弧 \widehat{CD} ;
- 以 C 为圆心, 以 $2d$ 为半径作弧 \widehat{AD} ;
- 以 D 为圆心, 以 $2d$ 为半径作弧 \widehat{BC} .

引理 1^[4] 由图 1 中 4 段圆弧组成的曲线是宽度为 $2d$ 的常宽曲线, 所围凸域为常宽凸集, 即常宽等腰梯形.

这类常宽等腰梯形的面积由两对角线的夹角 $\angle COD = 2\theta \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及宽度 $2d$ 决定.

引理 2^[4] 宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形的面积为

$$S(K) = \frac{2d^2}{\sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

引理 3 设函数

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi \sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)$$

则 $f(\theta)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 其值域为 $\left[2 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, 1\right]$.

证 对于任意的 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$f'(\theta) = \frac{4 \cos \theta}{\pi \sin^3 \theta} (1 - \sin \theta) (\tan \theta - \theta) \geq 0$$

故 $f(\theta)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增. 又因

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

因此 $f(\theta)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[2 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, 1\right]$.

引理 4 设 K_2 是方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a \geq b)$ 的椭圆, 设 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 当

$$\frac{2a}{\pi \sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) < b \leq a \quad (3)$$

时, 必存在宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形 K_1 , 使得

$$a < d < \sin \theta \sqrt{\frac{ab\pi}{2(\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}}$$

证 由引理 3, 对于任意的 $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$0 < 2 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \leq \frac{2}{\pi \sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) < 1$$

不等式两边同乘正实数 a , 得

$$0 < \frac{2a}{\pi \sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) < a$$

故一定存在正实数 b , 使得

$$0 < \frac{2a}{\pi \sin^2 \theta} (\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) < b \leq a$$

不等式两边同乘 $a\pi$, 整理得

$$a < \sin \theta \sqrt{\frac{ab\pi}{2(\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}}$$

故一定存在正实数 d , 使得

$$a < d < \sin \theta \sqrt{\frac{ab\pi}{2(\pi \sin^2 \theta + \theta - 2\theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}}$$

定理 1 设 K_2 是方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a \geq b)$ 且满足 (3) 式的一类椭圆, 则存在宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形 K_1 , 对任意的 $u \in S^1$, 有

$$L(K_1 | u^\perp) > L(K_2 | u^\perp)$$

而

$$S(K_1) < S(K_2)$$

其中 S^1 为 1 维单位圆, $L(K_i | u^\perp)$ ($i=1,2$) 为 K_i 在与 u 垂直的方向上投影线段的长, $S(K_i)$ 为 K_i 的面积.

证 设图 1 中 K_1 是宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形, $|AC|=|BD|=|CD|=2d$, $\angle COD=2\theta$, 由引理 2, 其面积为

$$S(K_1) = \frac{2d^2}{\sin^2\theta} (\pi\sin^2\theta + \theta - 2\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

K_2 是方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的椭圆, 其面积为

$$S(K_2) = ab\pi$$

当椭圆 K_2 和常宽等腰梯形 K_1 满足引理 4 的条件时, 由引理 4 可得

$$d < \sin\theta \sqrt{\frac{ab\pi}{2(\pi\sin^2\theta + \theta - 2\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta)}}$$

即

$$\frac{2d^2}{\sin^2\theta} (\pi\sin^2\theta + \theta - 2\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) < ab\pi$$

故

$$S(K_1) < S(K_2)$$

而由宽度定义及引理 4, 有

$$L(K_1 | u^\perp) = 2d > 2a \geq L(K_2 | u^\perp) \geq 2b$$

即

$$L(K_1 | u^\perp) > L(K_2 | u^\perp)$$

故定理 1 得证.

推论 1 当宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形 K_1 中 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 常宽等腰梯形为 Reuleaux 三角形, 椭圆 K_2 的长半轴与短半轴长分别为 a, b . 当

$$\frac{2a}{\pi} (\pi - \sqrt{3}) < b \leq a < d < \sqrt{\frac{ab\pi}{2(\pi - \sqrt{3})}}$$

时, 对任意的 $u \in S^1$, 有

$$L(K_1 | u^\perp) > L(K_2 | u^\perp)$$

$$S(K_1) < S(K_2)$$

推论 2 当宽度为 $2d$ 的常宽等腰梯形 K_1 中 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 常宽等腰梯形为 Reuleaux 三角形, 而椭圆 K_2 为半径为 r 的圆. 当

$$r < d < r \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\pi - \sqrt{3}}}}$$

时, 对任意的 $u \in S^1$, 有

$$L(K_1 | u^\perp) > L(K_2 | u^\perp)$$

$$S(K_1) < S(K_2)$$

参考文献:

- [1] SHEPHARD G. Shadow Systems of Convex Sets [J]. Israel Journal of Mathematics, 1964(2): 229-236.
- [2] GARDNER R. Geometric Tomography [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [3] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. New York: Cambridge University Press, 1993.

- [4] 徐文学, 周家足, 陈方维. 一类常宽“等腰梯形” [J]. 中国科学: 数学, 2011, 41(10): 855–860.
- [5] BLASCHKE W. Konvexe Bereiche Gegebener Konstanter Breite and Kleinsten Inhalts [J]. Math Ann, 1915, 76: 504–513.
- [6] LEBESGUE H. Sur le Problème des Isopérimètres et sur les Domaines de Largeur Constante [J]. Bull Soc Math, 1914(7): 72–76.
- [7] LEBESGUE H. Sur Quelques Questions des Minimums, Relatives aux Courbes Orbiformes, et sur les Rapports Avec le Calcul des Variations [J]. Math Pure Appl, 1921, 4(8): 67–96.
- [8] FUJIWARA M. Analytical Proof of Blaschke's Theorem on the Curve of Constant Breadth with Minimum Area I [J]. Proc Imp Acad Japan, 1927(3): 307–309.
- [9] 周传婷, 周家足. 关于平面 Bonnesen 型不等式与第 2 类完全椭圆积分的注记 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2011, 33(4): 145–147.
- [10] 戴 勇. 关于平面卵形区域的等周亏格上界估计的注记 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 37(4): 50–52.

An Explicit Counterexample to the Shephard Problem in the Euclidean Plane

LI Ze-qing¹, LUO Miao², ZENG Chun-na³, XU Wen-xue⁴

1. School of Mathematics and Computer Science, Bijie Normal University, Bijie Guizhou 551700, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China;

3. College of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;

4. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we give an explicit counterexample to the Shephard problem by the isosceles trapezoids of constant width and ellipsoid in the Euclidean plane \mathbb{R}^2 . Especially, the classical counterexample by a disc and Reuleaux triangle is given as our special case.

Key words: convex set of constant width; isosceles trapezoid of constant width; ellipsoid; Shephard problem

责任编辑 廖 坤

