DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.09.012

一类极大极小分式规划的最优性和对偶①

焦合华

长江师范学院 数学与计算机学院，重庆 涪陵 408100

摘要：利用$(p, r)-\eta$不变凸性函数，讨论了一类极大极小分式规划及其对偶问题：首先，给出并证明了这类极大极小分式规划的一个最优性充分条件；然后，针对这一类极大极小分式规划问题，提出了它的一个混合型对偶；最后，在适当的条件下，得到了相应的弱对偶定理，强对偶定理以及严格逆对偶定理.

关 键 词：$(p, r)-\eta$不变凸性函数；极大极小分式规划；最优性条件；混合型对偶

中图分类号：O221.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2014)9-0075-06

极大极小分式规划是多目标规划发展起来的一个重要分支，它不仅是最优化理论研究的重要课题，而且是博弈论、金融数学、最优控制等研究的重要数学模型. 由于多目标规划具有重大的应用价值，对现代社会的政治、经济、科技乃至军事都已产生了重要的影响，因此，对极大极小分式规划的研究已经成为一个新的研究热点，引起了众多学者的广泛关注[1-3].

文献[1-2]分别在不变凸性和(F, ρ)-凸性下，给出了极大极小分式规划的对偶规划及其各自的弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理. 文献[3]在广义凸性条件下讨论了极大极小分式规划的最优性条件和对偶性. 文献[4]首次在多目标规划中提出了混合型对偶的概念. 文献[5]给出了$(p, r)-\eta$不变凸函数的概念，推广了函数的不变凸性. 文献[6-7]在文献[5]基础上讨论了单目标和多目标规划问题的最优性条件及 Wolfe 对偶性.

本文试利用$(p, r)-\eta$不变凸性，探讨如下极大极小分式规划(P)的最优性充分条件和混合型对偶.

$$\min F(x) = \sup_{y \in Y} \frac{f(x, y)}{h(x, y)}$$
$$\text{s.t. } g(x) \leqslant 0, x \in X \tag{1}$$

其中：X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开子集；Y 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧子集；$f(\cdot, \cdot), h(\cdot, \cdot)$：$X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数，$f(x, y) \geqslant 0$，$h(x, y) > 0$；$g(\cdot)$：$X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数.

设 $\mathbb{R}^n_+$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的非负卦限，又设

$$J = \{1, 2, \cdots, q\}, J(x) = \{j \in J \mid g_j(x) = 0\}, Y(x) = \left\{ y \in Y \mid \frac{f(x, y)}{h(x, y)} = \sup_{z \in Y} \frac{f(x, z)}{h(x, z)} \right\}$$

---

① 收稿日期：2013-04-22

基金项目：国家自然科学基金资助项目(61373174)；重庆市教委科学技术研究基金资助项目(KJ131314)；长江师范学院校级重点项目(2013XJZD006).

作者简介：焦合华(1969-)，男，重庆涪陵人，教授，博士，主要从事最优化理论及其应用的研究.

$$K=\{(s,t,\bar{y})\in N\times\mathbb{R}_+^s\times\mathbb{R}^{m\times s}\mid 1\leqslant s\leqslant n+1,\ t=(t_1,\cdots t_s)\in\mathbb{R}_+^s,\ \bar{y}=(y_1,\cdots,y_s)$$

且 $\sum_{i=1}^{s}t_i=1,\ y_i\in Y(x),\ i=1,\cdots,s\}$.

定理 A[8] (必要条件) 设 x^* 是(P)的最优解, $\nabla g_j(x^*)$ (其中 $j\in J(x^*)$)线性独立, 那么存在 $(s^*,t^*,\bar{y})\in K$, $v^*\in\mathbb{R}$, $u^*\in\mathbb{R}_+^q$ 使得:

$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\{\nabla f(x^*,y_i)-v^*\nabla h(x^*,y_i)\}+\nabla\sum_{j=1}^{q}u_j^*g_j(x^*)=0 \tag{2}$$

$$f(x^*,y_i)-v^*h(x^*,y_i)=0 \qquad i=1,\cdots,s^* \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{q}u_j^*g_j(x^*)=0 \tag{4}$$

$$u^*\in\mathbb{R}_+^q,\ t_i^*\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{s^*}t_i^*=1,\ y_i\in Y(x^*),\ i=1,\cdots,s^* \tag{5}$$

其中 $\nabla(x^*,y_i)=\left.\dfrac{\partial f(x,y_i)}{\partial x}\right|_{x=x^*}$.

定理 B[1] (必要条件) 设 x^* 是(P)的最优解, $\nabla g_j(x^*)$ (其中 $j\in J(x^*)$)线性独立, 则存在 $(s^*,t^*,\bar{y})\in K$ 使得:

$$\nabla\left(\frac{\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*f(x^*,y_i)+\sum_{j=1}^{q}u_j^*g_j(x^*)}{\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*h(x^*,y_i)}\right)=0$$

$$\sum_{j=1}^{q}u_j^*g_j(x^*)=0 \qquad u\in\mathbb{R}_+^q,$$

$$u^*\in\mathbb{R}_+^q,\ t_i^*\geqslant 0 \qquad \sum_{i=1}^{s^*}t_i^*=1$$

$$y_i\in Y(x^*) \qquad i=1,2,\cdots,s^*$$

定义[5] 设 $f:T\longrightarrow\mathbb{R}$ 是非空开集 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的可微函数, $\eta:T\times T\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是一个向量函数, p,r 是任意实数, 如果函数 f 对所有 $x\in T$, 都满足:

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{rf(x)}\geqslant\frac{1}{r}\mathrm{e}^{rf(u)}\times\left[1+\frac{r}{p}\nabla f(u)(\mathrm{e}^{p\eta(x,u)}-1)\right] \qquad 当\ p\neq 0,\ r\neq 0$$

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{rf(x)}\geqslant\frac{1}{r}\mathrm{e}^{rf(u)}\times[1+r\nabla f(u)\eta(x,u)] \qquad 当\ p=0,\ r\neq 0$$

$$f(x)-f(u)\geqslant\frac{1}{p}\nabla f(u)(\mathrm{e}^{p\eta(x,u)}-1) \qquad 当\ p\neq 0,\ r=0$$

$$f(x)-f(u)\geqslant\nabla f(u)\eta(x,u) \qquad 当\ p=0,\ r=0$$

以上不等式中的大于关系在 $x\neq u$ 时成立. 那么称 f 是在 T 上 u 处的 $(p,r)-\eta$ 不变凸(严格 $(p,r)-\eta$ 不变凸)函数.

注 1 若以上不等式中不等号反向, 则相应称 f 为 T 上 u 处的 $(p,r)-\eta$ 不变凹(严格 $(p,r)-\eta$ 不变凹)函数; 当 $p=0$, $r\neq 0$ 时, f 是 T 上的 $r-\eta$ 不变凸函数; 当 $p=0$, $r=0$ 时, f 是 T 上的 η 不变凸函数[9].

1 最优性充分条件

定理 1 设 x^* 是规划(P)的可行解, $(x^*,v^*,u^*,s^*,t^*,\bar{y})$ 满足(2)-(5)式, 如果 $\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\{f(\cdot,y_i)-$

$v^* h(\cdot, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(\cdot)$ 是在 x^* 处的$(p, r)-\eta$ 不变凸函数，那么 x^* 是(P) 的最优解.

注 2 以下定理只在$(p, r)-\eta$ 不变凸的 $p \neq 0$，$r \neq 0$ 情形下证明，其它情形类似可证.

证 假设 x 是(P) 的任一其它可行解，由已知，有

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{r(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x, y_i)-v^* h(x, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(x))} \geqslant \frac{1}{r}\mathrm{e}^{r(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x^*, y_i)-v^* h(x^*, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(x^*))} \times$$

$$\{1+\frac{r}{p}(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{\nabla f(x^*, y_i)-v^* \nabla h(x^*, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* \nabla g_j(x^*))(\mathrm{e}^{p\eta(x, x^*)}-1)\}$$

由(3) 式得：

$$\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x^*, y_i)-v^* h(x^*, y_i)\}=0$$

结合(4) 式可得：

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{r(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x, y_i)-v^* h(x, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(x))} \geqslant$$

$$\frac{1}{r}\{1+\frac{r}{P}(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{\nabla f(x^*, y_i)-v^* \nabla h(x^*, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* \nabla g_j(x^*))(\mathrm{e}^{p\eta(x, x^*)}-1)\}$$

再由(2) 式得：

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{r(\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x, y_i)-v^* h(x, y_i)\}+\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(x))} \geqslant \frac{1}{r} \tag{6}$$

当 $r>0$ 时，因

$$\sum_{j=1}^{q} u_j^* g_j(x) \leqslant 0$$

所以由(6) 式得

$$\sum_{i=1}^{s^*} t_i^* \{f(x, y_i)-v^* h(x, y_i)\} \geqslant 0$$

于是存在 i_0，使得

$$f(x, y_{i_0})-v^* h(x, y_{i_0}) \geqslant 0$$

故

$$\sup_{y\in Y}\frac{f(x, y)}{h(x, y)} \geqslant \frac{f(x, y_{i_0})}{h(x, y_{i_0})} \geqslant v^* = \frac{f(x^*, y)}{h(x^*, y)}$$

当 $r<0$ 时，类似可证.

2 混合型对偶

给定 J_1, J_2，使 $J_1 \cup J_2 = J = \{1, 2, \cdots, q\}$，且 $J_1 \cap J_2 = \phi$. 记

$$G(W, z)=\frac{\sum_{i=1}^{s} t_i f(z, y_i)+\sum_{j\in w} u_j g_j(z)}{\sum_{i=1}^{s} t_i h(z, y_i)}, W \in \{J_1, J_2\}$$

对规划(P) 提出如下的混合型对偶：(MD)

$$\max_{(s, t, \bar{y})\in K} \quad \sup_{(x, u)\in H(s, t, \bar{y})} G(J_1, z)$$

这里 $H(s, t, \bar{y})$ 表示满足条件(7),(8) 的 $(z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^q$ 的集合:

$$\nabla\left(\frac{\sum_{i=1}^{s} t_i f(z, y_i) + \sum_{j=1}^{q} u_j g_j(z)}{\sum_{i=1}^{s} t_i h(z, y_i)}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{j \in J_2} u_j g_j(z) \geqslant 0 \tag{8}$$

如果集合 $H(s, t, \bar{y})$ 是空集,那么规定它的上确界为 $-\infty$.

注 3 当 $J_1 = \phi$ 时,由 $y_i \in Y(z)$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 知 $G(J_1, z) = F(z)$, 可见此时(MD) 为文献[1-2] 中的对偶规划(DII);当 $J_2 = \phi$ 时,(MD) 为文献[1-2] 中的对偶规划(DIII). 记

$$m(\cdot) = \sum_{i=1}^{s} t_i h(\cdot, y_i),\ \varphi(\cdot) = m(z)\{[\sum_{i=1}^{s} t_i f(\cdot, y_i) + \sum_{j \in J} u_j g_j(\cdot)] - m(\cdot) G(J, z)\}$$

$$\varphi_1(\cdot) = m(z)[\sum_{i=1}^{s} t_i f(\cdot, y_i) + \sum_{j \in J} u_j g_i(\cdot)],\ \varphi_2(\cdot) = m(\cdot)[\sum_{i=1}^{s} t_i f(z, y_i) + \sum_{j \in J} u_j g_j(z)]$$

定理 2(弱对偶定理) 设 x 和 $(z, u, s, t, \bar{y})$ 分别是(P) 和(MD) 的可行解,若下列条件之一成立:

(a) $\varphi(\cdot)$ 是在 z 处的 $(p, r)-\eta$ 不变凸函数;

(b) $\varphi_1(\cdot)$ 和 $\varphi_2(\cdot)$ 分别是在 z 处的 $(p, r)-\eta$ 不变凸和 $(p, r)-\eta$ 不变凹函数,则 $F(x) \geqslant G(J_1, z)$.

证 若(a) 成立,则 $\frac{1}{r}e^{r\varphi(x)} \geqslant \frac{1}{r}e^{r\varphi(z)}[1 + \frac{r}{p}\nabla\varphi(z)(e^{p\eta(x, z)} - 1)]$.

由(7) 式可得 $\nabla\varphi(z) = 0$, 而 $\varphi(z) = 0$, 故

$$\varphi(x) = m(z)\{[\sum_{i=1}^{s} t_i f(x, y_i) + \sum_{j \in J} u_j g_j(x)] - m(x) G(J, z)\} \geqslant 0$$

$$[\sum_{i=1}^{s} t_i f(x, y_i) + \sum_{j \in J} u_j g_j(x)] - m(x) G(J, z) \geqslant 0$$

因此

$$G(J, x) \geqslant G(J, z)$$

又因为

$$\sum_{j \in J_2} u_j g_j(x) \leqslant 0,\ \sum_{j \in J_2} u_j g_j(z) \geqslant 0$$

所以

$$G(J_1, x) \geqslant G(J, x) \geqslant G(J, z) \geqslant G(J_1, z)$$

于是

$$G(J_1, z) \leqslant G(J_1, x) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{s} t_i f(x, y_i)}{\sum_{i=1}^{s} t_i h(x, y_i)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{t_i h(x, y_i)}{\sum_{i=1}^{s} t_i h(x, y_i)} \cdot \frac{f(x, y_i)}{h(x, y_i)} \leqslant$$

$$\sup_{y \in Y} \frac{f(x, y)}{h(x, y)} = F(x) \tag{9}$$

若(b) 成立,则

$$\frac{1}{r}e^{r\varphi_1(x)} \geqslant \frac{1}{r}e^{r\varphi_1(z)}[1 + \frac{r}{p}\nabla\varphi_1(z)(e^{p\eta(x, z)} - 1)] \tag{10}$$

$$\frac{1}{r}e^{r\varphi_2(x)} \leqslant \frac{1}{r}e^{r\varphi_2(z)}[1 + \frac{r}{p}\nabla\varphi_2(z)(e^{p\eta(x, z)} - 1)] \tag{11}$$

由(7) 式可得 $\nabla\varphi_1(z)-\nabla\varphi_2(z)=0$，而 $\varphi_1(z)=\varphi_2(z)$，故将(10),(11) 两式相减可得

$$\frac{1}{r}e^{r\varphi_1(x)}-\frac{1}{r}e^{\varphi_2(x)}\geqslant\frac{1}{r}e^{r\varphi_1(z)}\left[\frac{r}{p}(\nabla\varphi_i(z)-\nabla\varphi_2(z))\times(e^{p\eta(x,z)}-1)\right]=0$$

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)$$

$$m(z)\left[\sum_{i=1}^{s}t_if(x,y_i)+\sum_{j\in J}u_jg_j(x)\right]\geqslant m(x)\left[\sum_{i=1}^{s}t_if(z,y_i)+\sum_{j\in J}u_jg_j(z)\right]$$

$$G(J,x)\geqslant G(J,z)$$

由(a) 知(9) 式成立.

定理 3(强对偶定理)　假设 x^* 是(P) 的最优解，$\nabla g_j(x^*)$（其中 $j\in J(x^*)$）线性独立，若对(MD) 的所有可行解$(z,u,s,t,\bar{y})$ 下列条件之一成立：

(a) $\varphi(\cdot)$ 是在 z 处的$(p,r)-\eta$ 不变凸函数；

(b) $\varphi_1(\cdot)$，$\varphi_2(\cdot)$ 分别是在 z 处的$(p,r)-\eta$ 不变凸函数和$(p,r)-\eta$ 不变凹函数，则(P) 和(MD) 的最优值相等.

证　由定理 B 知，$(x^*,u^*,s^*,t^*,\bar{y})$ 是(MD) 的可行解，且 $u_j^*g_j(x^*)=0$，$j=1,\cdots,q$，又由于 $y_i\in Y(x^*)$，$i=1,\cdots,s$，所以

$$F(x^*)=\frac{f(x^*,y_i)}{h(x^*,y_i)}=\frac{\sum_{i=1}^{s}t_i^*f(x^*,y_i)}{\sum_{i=1}^{s}t_i^*h(x^*,y_i)}=G(J_1,x^*)$$

由定理 2 知(P) 和(MD) 的最优值相等.

定理 4(严格逆对偶定理)　设 $\bar{x}$，$(z,u,s,t,\bar{y})$ 分别是(P) 和(MD) 的最优解，且 $\nabla g_j(\bar{x})$（其中 $j\in J(\bar{x})$）线性独立，若对所有$(s,t,\bar{y})\in K$，$(z,u)\in H(s,t,\bar{y})$，下列条件之一成立：

(a) $\varphi(\cdot)$ 是在 x 处的严格$(p,r)-\eta$ 不变凸函数；

(b) $\varphi_1(\cdot)$，$\varphi_2(\cdot)$ 分别是在 x 处的严格$(p,r)-\eta$ 不变凸函数和严格$(p,r)-\eta$ 不变凹函数，则 $\bar{x}=z$.

证　假设 $\bar{x}\neq z$，若(a) 或(b) 成立，仿照定理 2 的证明易得：

$$G(J_1,z)<G(J_1,\bar{x})\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{s}t_if(\bar{x},y_i)}{\sum_{i=1}^{s}t_ih(\bar{x},y_i)}\leqslant\sup_{y\in Y}\frac{f(\bar{x},y)}{h(\bar{x},y)}=F(\bar{x})$$

而由定理 3 知 $F(\bar{x})=G(J_1,z)$，与上式矛盾. 定理 4 得证.

参考文献：

[1] LIU J C，WU C S. On Minimax Fractional Optimality Conditions with Invexity [J]. J Math Anal Appl，1998，219(1)：21－35.

[2] LIU J C，WU C S. On Minimax Optimality Conditions with (F,ρ)-Convexity [J]. J Math Anal Appl，1998，219(1)：36－51.

[3] LIANG Z A，SHI Z W. Optimality Conditions and Duality for a Minimax Fractional Programming Problem with Generalized Convexity [J]. J Math Anal Appl，2003，277(2)：474－488.

[4] XU Z K. Mixed Type Duality in Multiobjective Programming Problems [J]. J Math Anal Appl，1996，198(3)：621－635.

[5] ANTCZAK T. (p,r)-Invex Sets and Functions [J]. J Math Anal Appl，2001，263(2)：355－379.

[6] ANTCZAK T. On (p, r)-Invexity-Types Nonlinear Programming Problems [J]. J Math Anal Appl, 2001, 264(2): 382-397.
[7] ANTCZAK T. (p, r)-Invexity in Multiobjective Programming [J]. E J O R, 2004, 152(1): 72-78.
[8] CHANDRA S, KUMAR V. Duality in Fractional Minimax Programming [J]. J Austral Math Soc Ser A, 1995, 58(3): 376-386.
[9] HANSON M A. On Sufficiency of the Kuhn-Tuck Conditions [J]. J Math Anal Appl, 1981, 80(1): 545-550.

Optimality and Duality for a Class of Max-Min Fractional Programming

JIAO He-hua
College of Mathematics and Computer, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China

Abstract: Using (p, r)$-\eta$ invexity functions, a class of max-min fractional programming and its duality problem are considered. First, an optimality sufficient condition is given and proved for the class of max-min fractional programming. Next, a mixed-type duality for the class of max-min fractional programming problem is formulated. Finally, the results about weak duality, strong duality and strictly reverse duality are obtained under suitable conditions.

Key words: (p, r)$-\eta$ invexity function; max-min fractional programming; optimality condition; mixed-type duality

责任编辑 张 枸