

简化的双线性法求 Lax 型 7 阶 KdV 方程的多孤子解^①

张金华, 李 薇

红河学院 数学系, 云南 蒙自 661100

摘要: 应用简化的双线性方法研究由 Lax 导出的 7 阶 KdV 方程. 通过一些辅助函数的特殊表达式作为解的假设, 利用数学软件计算获得了该方程的两孤子解和三孤子解, 并给出两孤子解和三孤子解的三维图和二维图, 直观地显示了这两种孤子解的动力学行为, 同时也体现了简化的双线性方法在解可积方程中的有效性.

关 键 词: 简化的双线性方法; Lax 型 7 阶 KdV 方程; 广田法; 多孤子解

中图分类号: O175.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2014)9-0081-07

非线性问题的研究工作是当前数学和物理领域极为重要的研究课题, 其研究成果在非线性和物理领域有着非常广泛的应用并产生了比较深远的影响. 特别是在非线性发展方程的精确求解方面, 非线性方程的多孤子解的研究已经成为非线性领域的一大亮点. 求解非线性发展方程的多孤子解如今有许多方法, 如: Darboux^[1-2] 变换法、Bäcklund 变换法^[3-4]、反散射法^[5-6] 和广田法^[7-8] 等. 传统广田法必须结合相关变换并利用双线性微分算子(即 D -算子)将非线性偏微分方程化为双线性微分算子方程, 然后通过摄动法才能求解. 例如: 求解 KdV 方程 $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ 时, 在变换 $u = 2[\ln f(x, t)]_{xx}$ 下, 将 KdV 方程化为双线性方程 $D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0$, 然后利用摄动方法将 f 展开成小参数 ϵ 的幂级数 $f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots$ 的形式, 通过截断来获得精确解. 广田法是一种普遍实用的双线性方法. 文献[9]中应用广田法, 成功获得了 5 阶 KdV 方程的多孤子解. 关于广田法的另外一些应用可参见文献[10]中引用的文献. 然而, 应用广田法求解非线性发展方程的多孤子解, 关键是把非线性方程双线性化, 实现这一步往往比较困难, 当一些方程的非线性项比较多, 阶数较高时, 往往难于找到甚至找不到它们的双线性微分算子方程, 比如本文即将研究的 7 阶 KdV 方程, 实现双线性化就非常困难. 文献[11-12]提出: “非线性方程的双线性化并不是必须的”, 于是这些文献给出了一种双线性方法的简化形式. 作为应用方面的推广, 本文利用这种简化的广田法来研究下列由 Lax 导出的 7 阶 KdV 方程^[13-15],

$$u_t + [35u^4 + 70(u^2u_{xx} + uu_x^2) + 7(2uu_{xxx} + 3u_{xx}^2 + 4u_xu_{xxx}) + u_{xxxxx}]_x = 0 \quad (1)$$

方程(1)作为水波模型, 可以揭示和解释水波的运动规律和出现的各种非线性水波现象, 非常有应用价值. 本文所应用的这种简化的广田法, 与原始的广田法相比较, 无需寻找它的双线性算子. 众所周知, 寻找一个高阶的非线性发展方程的双线性算子是非常困难的. 如果应用这种简化的广田法, 就可以避开这个难点, 而且计算简单有效. 下面我们来介绍这种简化的广田法.

① 收稿日期: 2013-12-01

基金项目: 云南省自然科学基金资助项目(2013FZ116).

作者简介: 张金华(1956-), 男, 云南泸西人, 教授, 主要从事偏微分方程理论及应用的研究.

1 方法介绍

对于非线性方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2)$$

作如下非线性变换

$$u = u(f) \quad (3)$$

其中 $f = f(x, t)$. 将(3)式代入(2)式得到

$$Q(f) = 0 \quad (4)$$

对于方程(4), 定义线性算子 $L \cdot$ 和非线性算子 $N_1 \cdot, N_2 \cdot, N_3 \cdot, \dots$, 将(4)式化简. 显然, 寻找线性算子 $L \cdot$ 和非线性算子 $N_1 \cdot, N_2 \cdot, N_3 \cdot, \dots$ 要比找双线性算子 D 容易得多. 利用一个线性算子 $L \cdot$ 和多个非线性算子 $N_1 \cdot, N_2 \cdot, N_3 \cdot, \dots$ 相结合的方法来分化一次性获得双线性算子 D 的难点, 即避开双线性算子也可以求解方程(2), 这就是简化的广田法的妙用, 它与传统的广田法相比, 可以避开寻找双线性算子 D 的难点, 而且计算简单高效.

设

$$f(x, t) = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots + \epsilon^r f_r + \dots \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式得到关于 ϵ 的多项式.

令关于 ϵ 各次幂的系数为零, 得到关于 $f_1, f_2, f_3 \dots f_r, \dots$ 的系列递推方程:

$$\epsilon: L \cdot f_1 = 0 \quad (6)$$

$$\epsilon^2: L \cdot f_2 = N_1(f_1, f_1) + \dots \quad (7)$$

$$\epsilon^3: L \cdot f_3 = N_2(f_1, f_1, f_1) + N_1(f_1, f_2) + \dots \quad (8)$$

...

以上系列递推方程(6)–(8)的特点是方程右边的各项依赖于前面方程的解. 前面方程的解 $f_1, f_2, f_3 \dots f_r, \dots$ 中有一个 $f_i = 0$, 代入后面的方程, 通过后续运算可验证得到所有的 $f_k = 0 (k > i)$, 由此(5)式被截断, 从而得到非线性方程(2)的精确解.

分别取 $f_1 = e^{\xi_1}, f_1 = e^{\xi_1} + e^{\xi_2}, f_1 = e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3}$, 其中 $\xi_i = g_i(x, t) (i = 1, 2, 3)$ 代入递推方程(6)–(8)确定 $f_1, f_2, f_3 \dots$, 将确定的 $f_1, f_2, f_3 \dots$ 代入(5)式和(3)式得到非线性方程(2)的单孤子解、双孤子解和三孤子解. 依此类推, 可以进一步得到非线性方程(2)的 $n (n > 3)$ 孤子解.

2 Lax 型 7 阶 KdV 方程的多孤子解

下面我们将用上述方法求 Lax 型 7 阶 KdV 方程的多孤子解.

设方程(1)的非线性变换为

$$u(x, t) = M[\ln(f)]_{xx} \quad (9)$$

其中 M 为待定常数.

将(9)式代入(1)式容易确定 $M = 2$, 于是有

$$u(x, t) = 2[\ln(f)]_{xx} \quad (10)$$

其中 $f = f(x, t)$ 为待定函数.

将(10)式代入(1)式, 方程(1)被化为下列关于 f 的齐次微分方程

$$\begin{aligned} & (-f_{xxt} - f_{9x})f^5 + (2f_x f_{xt} + 9f_{8x} f_x + 8f_{7x} f_{xx} - 14f_{5x} f_{4x} + f_{xx} f_t)f^4 + (-44f_{7x} f_x^2 + 56f_{5x} f_x f_{xxx} - \\ & 2f_x^2 f_t - 28f_{5x} f_{xx}^2 + 70f_{4x}^2 f_x - 56f_{6x} f_x f_{xx})f^3 + (140f_{4x} f_x f_{xx}^2 - 420f_{4x} f_x^2 f_{xxx} + 140f_{6x} f_x^3 + \\ & 140f_{5x} f_x^2 f_{xx})f^2 + (560f_{xxx}^2 f_x^3 - 280f_{xx}^2 f_x^2 f_{xxx} - 280f_{5x} f_x^4)f - 560f_{xx} f_x^4 f_{xxx} + 280f_{4x} f_x^5 + \\ & 280f_{xx}^3 f_x^3 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

将方程(11)简写为

$$f^5 L \cdot f + f^4 N_1(f, f) + f^3 N_2(f, f, f) + f^2 N_3(f, f, f, f) +$$

$$fN_4(f, f, f, f, f) + N_5(f, f, f, f, f) = 0 \quad (12)$$

在(12)式中定义了线性算子 $L \cdot$ 及非线性算子 $N_1, N_2, N_3, \dots$ 分别为:

$$L \cdot = -f_{xxt} - f_{9x}$$

$$N_1(f, g) = 2f_x g_{xt} + 9f_{8x} g_x + 8f_{7x} g_{xx} - 14f_{5x} g_{4x} + f_{xx} g_t$$

$$N_2(f, g, h) = -44f_{7x} g_x h_x + 56f_{5x} g_x h_{xxx} - 2f_x g_x h_t - 28f_{5x} g_{xx} h_{xx} + 70f_{4x} g_{4x} h_x - 56f_{6x} g_x h_{xx}$$

$$N_3(f, g, h, j) = 140f_{4x} g_x h_{xx} j_{xx} - 420f_{4x} g_x h_{xx} j_{xxx} + 140f_{6x} g_x h_{xx} j_x + 140f_{5x} g_x h_{xx} j_{xxx}$$

$$N_4(f, g, h, j, k) = 560f_{xxx} g_{xxx} h_{xx} j_x k_x - 280f_{xx} g_{xx} h_{xx} j_x k_{xxx} - 280f_{5x} g_x h_{xx} j_x k_x$$

$$N_5(f, g, h, j, k, l) = -560f_{xx} g_x h_{xx} j_x k_x l_{xxx} + 280f_{4x} g_x h_{xx} j_x k_x l_x + 280f_{xx} g_{xx} h_{xx} j_x k_x l_{xx}$$

这里的 f, g, h, j, k, l 均为辅助函数. 为了得到方程(1)的孤子解, 设

$$f(x, t) = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \dots + \epsilon^r f_r + \dots \quad (13)$$

式中 $f_r (r=1, 2, 3, \dots)$ 为待定函数, ϵ 是小参数.

利用数学运算软件 maple, 将(13)式代入(12)式, 合并 ϵ 的同次幂, 令 ϵ^r 的系数为零, 得到关于 $f_r (r=1, 2, 3, \dots)$ 的系列递推方程:

$$\epsilon: L \cdot f_1 = 0 \quad (14)$$

$$\epsilon^2: L \cdot f_2 = -5f_1(L \cdot f_1) - N_1(f_1, f_1) \quad (15)$$

$$\epsilon^3: L \cdot f_3 = -4f_1 N_1(f_1, f_1) - N_2(f_1, f_1, f_1) - N_1(f_1, f_2) - N_1(f_2, f_1) - (10f_1^2 + 5f_2)(L \cdot f_1) - 5f_1(L \cdot f_2) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^4: L \cdot f_4 = & -N_2(f_2, f_1, f_1) - N_1(f_2, f_2) - N_1(f_3, f_1) - \\ & N_2(f_1, f_1, f_2) - N_3(f_1, f_1, f_1, f_1) - N_1(f_1, f_3) - \\ & N_2(f_1, f_2, f_1) - 5(L \cdot f_1)f_3 - 3f_1 N_2(f_1, f_1, f_1) - 4f_1 N_1(f_1, f_2) - 4f_1 N_1(f_2, f_1) - \\ & 10(L \cdot f_2)f_1^2 - 5f_1(L \cdot f_3) - 10(L \cdot f_1)f_1^3 - 20(L \cdot f_1)f_1 f_2 - 5(L \cdot f_2)f_2 - \\ & N_1(f_1, f_1)(6f_1^2 + 4f_2) \end{aligned} \quad (17)$$

...

首先考虑求方程(1)的单孤子解, 设

$$f_1 = e^{\xi}, \xi = kx - vt \quad (18)$$

其中 k, v 为待定常数. 将(18)式代入线性方程(14), 得到色散关系 $v = k^7$, k 为任意常数. 于是

$$f_1 = e^{\xi}, \xi = kx - k^7 t \quad (19)$$

将(19)式代入方程(15)的右端, 方程(15)变为

$$L \cdot f_2 = 0 \quad (20)$$

求解方程(20)得 $f_2 = 0$. 将 f_1, f_2 代入后面的系列递推方程(16), (17) 易得 $f_r = 0 (r \geq 2)$, 由此(13)式被截断. 若取(13)式中的 $\epsilon = 1$, 由(19), (13), (10)式得到方程(1)的单孤子解.

$$u = \frac{2k_1^2 e^{\xi_1}}{1 + e^{\xi_1}} - \frac{2k_1^2 (e^{\xi_1})^2}{(1 + e^{\xi_1})^2} \quad (21)$$

其次考虑求方程(1)的双孤子解, 设

$$f_1 = \sum_{i=1}^2 e^{\xi_i}, \xi_i = k_i x - v_i t \quad i=1, 2 \quad (22)$$

式中 k_i, v_i 待定. 将(22)式代入线性方程(14), 得到色散关系

$$v_1 = k_1^7, v_2 = k_2^7 \quad (23)$$

将(22), (23)式代入(15)式右边, 得到

$$L \cdot f_2 = 7k_1 k_2 (k_1 + k_2)(k_1 - k_2)^2 (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)^2 e^{\xi_1 + \xi_2}, \xi_i = k_i x - k_i^7 t \quad i=1, 2 \quad (24)$$

求解线性方程(24), 得到

$$f_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2}, \xi_i = k_i x - k_i^7 t \quad i=1, 2 \quad (25)$$

将(22), (23), (25) 式代入(16) 式得到

$$L \cdot f_3 = 0 \quad (26)$$

解之易得 $f_3 = 0$. 将 f_1, f_2, f_3 代入后面的系列递推方程(17) 易得 $f_r = 0 (r \geq 3)$, 由此(13) 式被截断. 若(13) 式中的 $\epsilon = 1$, 得到

$$f = 1 + e^{k_1 x - k_1^7 t} + e^{k_2 x - k_2^7 t} + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2}, \quad \xi_i = k_i x - k_i^7 t \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

将(27) 式代入(10) 式得到方程(1) 的双孤子解.

$$u(x, t) = 2 \left[\ln \left(1 + e^{k_1 x - k_1^7 t} + e^{k_2 x - k_2^7 t} + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2} \right) \right]_{xx} \quad (28)$$

其中 $\xi_i = k_i x - k_i^7 t, i = 1, 2$.

最后求方程的三孤子解. 设

$$f_1 = \sum_{i=1}^3 e^{\xi_i}, \quad \xi_i = k_i x - v_i x \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

式中 k_i, v_i 待定. 将(29) 式代入线性方程(14), 得到色散关系

$$v_1 = k_1^7, \quad v_2 = k_2^7, \quad v_3 = k_3^7 \quad (30)$$

$$f_1 = e^{k_1 x - k_1^7 t} + e^{k_2 x - k_2^7 t} + e^{k_3 x - k_3^7 t} \quad (31)$$

将(31) 式代入(15) 式得到

$$\begin{aligned} L \cdot f_2 = & 7k_1 k_2 (k_1 + k_2) (k_1 - k_2)^2 (k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)^2 e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^7 + k_2^7)t} + \\ & 7k_1 k_3 (k_1 + k_3) (k_1 - k_3)^2 (k_1^2 + k_1 k_3 + k_3^2)^2 e^{(k_1 + k_3)x - (k_1^7 + k_3^7)t} + \\ & 7k_2 k_3 (k_2 + k_3) (k_2 - k_3)^2 (k_2^2 + k_2 k_3 + k_3^2)^2 e^{(k_2 + k_3)x - (k_2^7 + k_3^7)t} \end{aligned} \quad (32)$$

设

$$f_2 = A_{12} e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^7 + k_2^7)t} + A_{13} e^{(k_1 + k_3)x - (k_1^7 + k_3^7)t} + A_{23} e^{(k_2 + k_3)x - (k_2^7 + k_3^7)t} \quad (33)$$

将(33), (30), (29) 式代入(15) 式解得

$$A_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad A_{13} = \frac{(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2}, \quad A_{23} = \frac{(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2} \quad (34)$$

$$f_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^7 + k_2^7)t} + \frac{(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2} e^{(k_1 + k_3)x - (k_1^7 + k_3^7)t} + \frac{(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2} e^{(k_2 + k_3)x - (k_2^7 + k_3^7)t} \quad (35)$$

将(31), (35) 式代入(16) 式得

$$\begin{aligned} L \cdot f_3 = & \frac{7(k_1 - k_2)^2 (k_1 - k_3)^2 (k_2 - k_3)^2 (k_1 + k_2 + k_3)^2}{(k_1 + k_2)(k_1 + k_3)(k_2 + k_3)} \\ & (k_2^4 + k_1^4 + 5k_1^2 k_2 k_3 + 5k_1 k_2 k_3^2 + 2k_2^3 k_3 + 3k_2^2 k_3^2 + 2k_3^3 k_2 + 2k_1^3 k_2 + \\ & 3k_1^2 k_2^2 + 2k_1 k_2^3 + k_3^4 + 2k_1^3 k_3 + 3k_1^2 k_3^2 + 2k_3^3 k_1 + 5k_1 k_2^2 k_3) e^{(k_1 + k_2 + k_3)x - (k_1^7 + k_2^7 + k_3^7)t} \end{aligned} \quad (36)$$

解方程(36) 得到

$$f_3 = \frac{(k_1 - k_2)^2 (k_1 - k_3)^2 (k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2 (k_1 + k_3)^2 (k_2 + k_3)^2} e^{(k_1 + k_2 + k_3)x - (k_1^7 + k_2^7 + k_3^7)t} \quad (37)$$

将(31), (35), (37) 式代入系列递推方程(17) 得到

$$L \cdot f_4 = 0 \quad (38)$$

解之易得 $f_4 = 0$. 将 f_1, f_2, f_3, f_4 代入后面的系列递推方程易得 $f_r = 0 (r \geq 4)$, 由此(13) 式被截断.

将(31), (35), (37) 式代入(13) 式, 取(13) 式中的 $\epsilon = 1$, 得到

$$\begin{aligned} f = & 1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3} + \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2} + \frac{(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2} e^{\xi_1 + \xi_3} + \frac{(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2} e^{\xi_2 + \xi_3} + \\ & \frac{(k_1 - k_2)^2 (k_1 - k_3)^2 (k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2 (k_1 + k_3)^2 (k_2 + k_3)^2} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}, \quad \xi_i = k_i x - k_i^7 t \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (39)$$

将(39)式代入(10)式得到方程(1)的三孤子解.

$$u(x, t) = 2[\ln(f)]_{xx} \tag{40}$$

其中 f 由(39)式确定.

对于其它 $n(n \geq 4)$ 孤子解, 可以用类似方法得到. 为了能够直观地显示这两种孤立子解的运动现象, 利用数学软件绘出了双孤子解及三孤子解的三维图形和二维图形, 见图 1 和图 2.

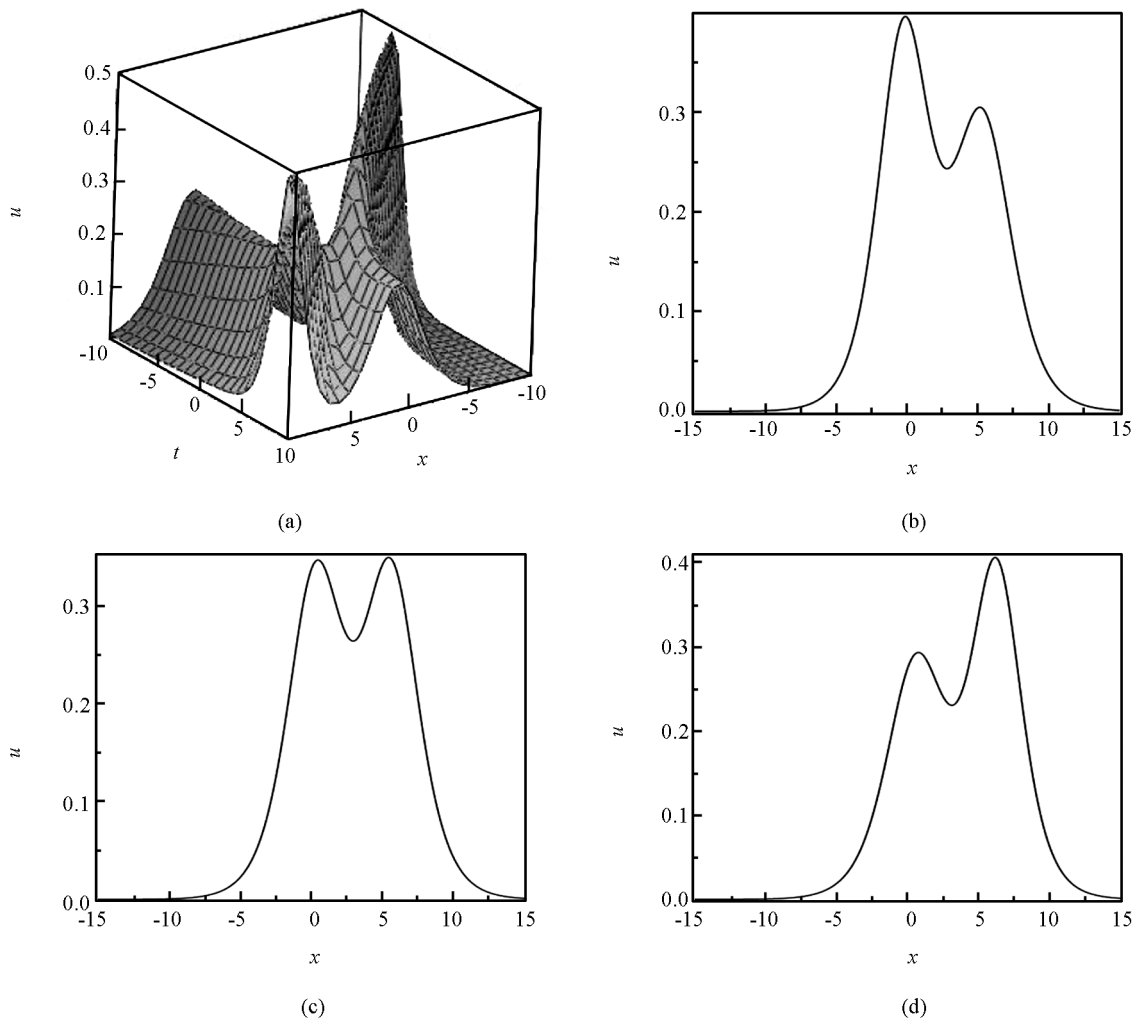


图 1 双孤子解的三维和二维波形图

图 1 中波形图参量值: 图 1(a) 中 $k_1 = 1.01, k_2 = -0.7, -10.5 \leq x \leq 10.5, -10.5 \leq t \leq 10.5$; 图 1(b) 中 $k_1 = 1.01, k_2 = -0.7, -15.5 \leq x \leq 15.5, t = 3.5$; 图 1(c) 中 $k_1 = 1.01, k_2 = -0.7, -15.5 \leq x \leq 15.5, t = 4.4$; 图 1(d) 中 $k_1 = 1.01, k_2 = -0.7, -15.5 \leq x \leq 15.5, t = 5.5$.

图 2 中波形图参量值: 图 2(a) 中 $k_1 = 1.005, k_2 = 0.69, k_3 = -0.85, -15.5 \leq x \leq 15.5, -10.5 \leq t \leq 10.5$; 图 2(b) 中 $k_1 = 1.005, k_2 = 0.69, k_3 = -0.85, -20.5 \leq x \leq 20.5, t = -0.25$; 图 2(c) 中 $k_1 = 1.005, k_2 = 0.69, k_3 = -0.85, -20.5 \leq x \leq 20.5, t = 3.5$; 图 2(d) 中 $k_1 = 1.005, k_2 = 0.69, k_3 = -0.85, -20.5 \leq x \leq 20.5, t = 13.5$.

图 1 显示的是两个振幅不相同的水波在水面上运动的现象, 图 2 显示的是 3 个振幅不相同的水波在水面传播的动力学现象. 根据孤立子理论, 我们知道, 振幅大的水波的运动速度比振幅小的水波的运动速度快, 经过一段时间以后, 高波一定能够追上矮波, 发生碰撞后相互分开, 这种运动现象, 在图 1 和图 2 中就能够直观地显示出来. 例如: 在图 2(b) 中, 左右两边是两列高波, 中间是一列矮波, 左边第一列具有最高振幅的孤立波的运动速度最快, 当时间增加时, 它赶上并超过了中间的那一列矮波(图 2(c)),

随着时间增加, 这列高波赶上并超过了原来右边的那列孤立波(图 2(d)), 最终形成了三列孤立波按高矮顺序排列传播的情况。

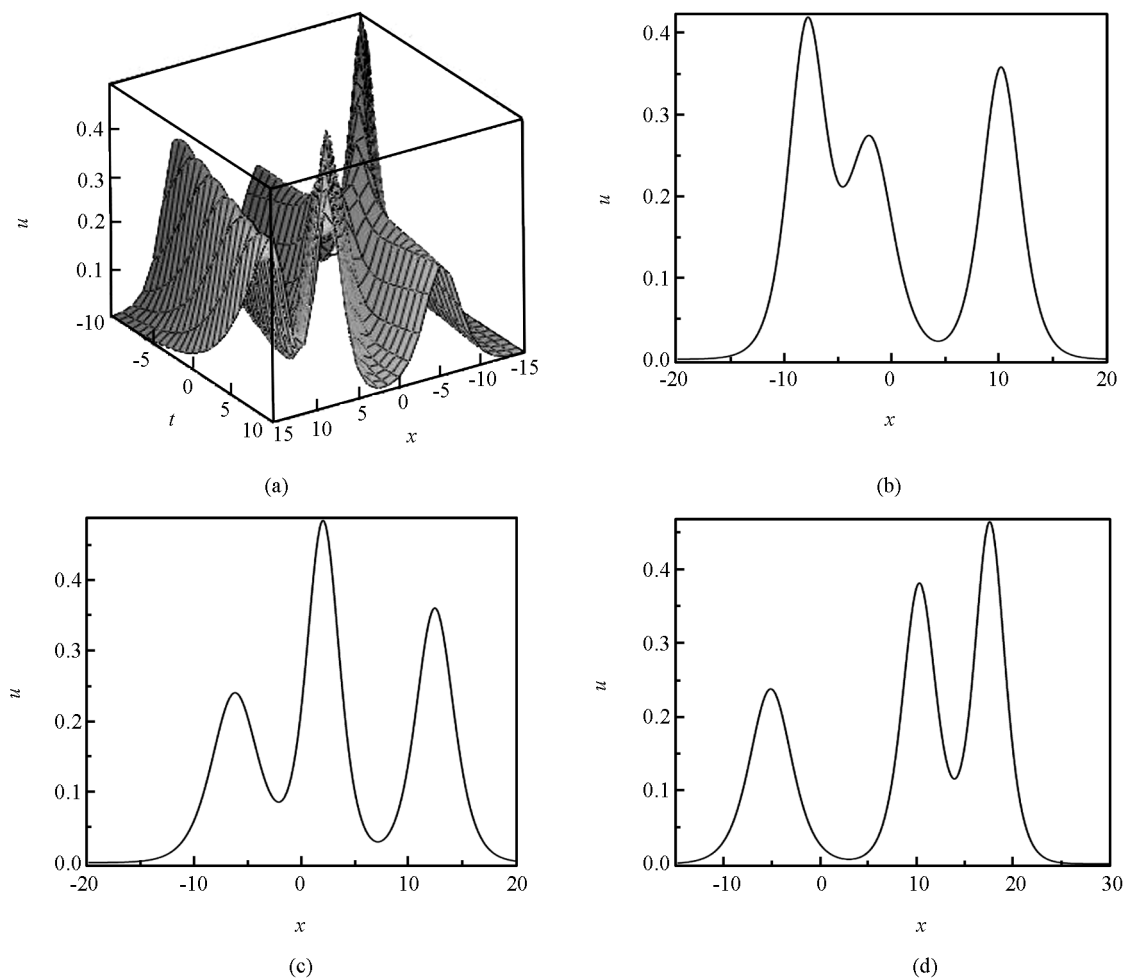


图 2 三孤子解的三维和二维波形图

3 结 论

我们应用简化的广田法, 在数学软件的帮助下, 成功地获得了 7 阶 KdV 方程的两孤子解和三孤子解, 并讨论了它们的动力学性质, 给出了它们的波形图(图 1, 图 2), 直观地揭示 2 个水波和 3 个水波在水面上的传播现象以及波与波之间的相互作用即碰撞和追赶的效果. 特别解(40) 式中的函数 f 极其复杂, 比文献[13—15] 中的结果更新颖, 这是对方程(1) 研究成果的很好补充。

参考文献:

- [1] DARBOUX G. Lecons Sur la Theorie Generals Des Surfaces et les Application Geometriques du Calcul Infinitesimal. Deuxiem Partie [M]. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1889.
- [2] GU C H, HU H S, ZHOU Z X. Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1999.
- [3] WAHLQUIST H D, ESTABROOK F B. Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-de Vries Equation [J]. Physical Review Letters, 1973, 31(23): 1386—1390.
- [4] GU C H, ZHOU Z X. On the Darboux Matrices of Bäcklund Transformations for AKNS Systems [J]. Letters in Mathematical Physics, 1987, 13(3): 179—187.
- [5] ZAKHAROV V E. The Inverse Scattering Method [J]. Solitons: Topics in Current Physics, 1980, 17: 243—285.

[6] ABLOWITZ M J, CLARKSON P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[7] HIROTA R. Direct Methods in Soliton Theory [J]. Topics in Current Physics, 1980, 17: 157—176.

[8] LI Z D, LI Q Y, HU X H, et al. Hirota Method for the Nonlinear Schrödinger Equation with an Arbitrary Linear Time-Dependent Potential [J]. Annals of Physics, 2007, 322(11): 2545—2553.

[9] ZHANG J H. Using the Simplified Hirota's Method to Investigate Multi-Soliton Solutions of the Fifth-Order KdV Equation [J]. International Mathematical Forum, 2012, 7(19): 917—924.

[10] 张金华, 丁玉敏. 一族非线性色散偏微分方程的指数函数型和三角函数型精确解 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(1): 28—33.

[11] HEREMAN W, NUSEIR A. Sybolic Methods to Construct Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equation s [J]. Math Comput Simulation, 1997, 43: 13—27.

[12] HEREMAN W, ZHAUNG W. Symbolic Software for Soliton Theory [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1995, 39(1—3): 361—378.

[13] ALVARO H S. Application of the Cole-Hopf Transformation for Finding Exact Solutions to Several Forms of the Sev-enth-Order KdV Equation [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2010, 2010: 1—14.

[14] DARVISHIA M T. A Numerical Solution of the Lax's 7th-order KdV Equation by Pseudospectral Method and Darvishi's Preconditioning [J]. Int J Contemp Math Sciences, 2007, 2(22): 1097—1106.

[15] WAZWAZ A M. The Hirota's Direct Method and the Tanh-Coth Method for Multiple-Soliton Solutions of the Sawada-Kotera-Ito Seventh-Order Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 199: 133—138.

A Simplied Bilinear Method for Solving
Seventh Order KdV Equations of the Lax Type

ZHANG Jin-hua, LI Wei

Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661100, China

Abstract: Using a simplified bilinear method, we study the seventh order KdV equation given by Lax. By some special auxiliary functions and employing a mathematical software, two-soliton solutions and three-soliton solutions of this equation are obtained, The 3D and 2D graphs of two-soliton solutions and three-soliton solutions are given, and the properties of these multi-soliton solutions can be directly perceived through the senses. It shows that the simplified bilinear method is very valid to solve integrable equations.

Key words: simplified bilinear method; seventh order KdV equation; Hirota method; multi-soliton solution

责任编辑 张 枸

