

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.09.014

约束向量优化问题的良定性^①

邓喜才^{1,2}, 左羽²

1. 贵州大学 数学系, 贵阳 550025; 2. 贵州师范学院 数学与计算机系, 贵阳 550018

摘要: 建立了约束向量优化问题的有限理性模型, 利用这个模型给出了约束向量优化问题的 Levitin-Polyak 良定性和 Hadamard 良定性概念且更进一步统一了两种不同类型良定性的概念. 在一个抽象的框架下, 给出了约束向量优化问题的各种良定性的充分条件.

关键词: 良定性; 向量优化问题; 有限理性模型

中图分类号: O177.91

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2014)9-0088-07

最优化问题的良定性主要有两种类型: Tykhonov 型良定性与 Hadamard 型良定性. 1966 年, 文献[1]对具有唯一解的最优化问题提出了 Tykhonov 良定性的概念. 接着, 文献[2]对具有约束的最优化问题提出了 Levitin-Polyak 良定性的概念. 文献[3]将这两种良定性概念统称为 Tykhonov 型良定性. 后来, 一些学者认为 Hadamard 曾研究过的微分方程解对参数的连续依赖性问题也是一种良定性, 于是提出了 Hadamard 良定性概念.

1993 年, 文献[3]对最优化问题的良定性进行了比较系统的研究. 1995 年, 文献[4]除了继续研究最优化问题良定性外, 还研究了多目标最优化问题良定性、Nash 平衡点问题良定性等. 最近, 文献[5]研究了最优化问题的良定性、多目标优化问题的良定性、非合作博弈的良定性、非合作广义多目标博弈的良定性等. 这些作者对最优化问题的良定性研究都提出了自己的统一的研究框架, 其中文献[5]利用有限理性模型统一了非线性问题的良定性研究. 另一方面, 各种良定性也已经被推广到约束向量优化问题^[6-9]. 文献[6]利用非线性标量化技巧对约束向量优化问题引入了几种类型的 Levitin-Polyak 良定性和广义 Levitin-Polyak 良定性概念并且得到了这几种类型良定的度量刻画. 文献[7]在有限维空间的背景下对凸向量优化问题的 Levitin-Polyak 良定性建立了度量刻画. 文献[8]采用非线性标量化的技巧研究了约束向量优化问题的 Levitin-Polyak 良定性. 特别地, 文献[9]也利用非线性标量化技巧对约束向量优化问题引入了两种 Hadamard 良定性概念, 并且得到了约束向量优化问题的 Hadamard 良定性的充分条件. 另外, 对其它优化问题的适定性研究还可以见文献[10-11]. 通过文献[6-9]不难发现将约束向量优化问题标量化是研究约束向量优化问题良定性的一种有效手段, 而且这些文献都采用非线性标量化的技巧来研究约束向量优化

① 收稿日期: 2013-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161008); 教育部博士点基金资助项目(20115201110002); 贵州省科学技术基金资助项目([2012]2289, [2013]2235).

作者简介: 邓喜才(1979-), 男, 湖北仙桃人, 副教授, 主要从事应用非线性分析.

问题的 Levitin-Polyak 良定性和 Hadamard 良定性.

受到以上文献的启发, 本文结合文献[5]中的有限理性模型和文献[6—9]中的非线性标量化技巧研究约束向量优化问题的 Levitin-Polyak 良定性和 Hadamard 良定性. 通过这种研究方法更进一步统一了约束向量优化问题的 Levitin-Polyak 良定性和 Hadamard 良定性结论.

1 预备知识

设 C 是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间 Y 中的一个闭凸锥, 且 $\text{int } C \neq \emptyset$, e 是 Y 中的一个固定向量且 $e \in \text{int } C$. 定义非线性标量化函数 $\xi_e: Y \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall y \in Y \quad \xi_e(y) = \inf\{r \in \mathbb{R}: y \in re - C\}$$

参考文献[10], 非线性标量化函数 ξ_e 具有连续性、次可加性、正齐次性、(严格)单调性(即: 如果 $y_2 - y_1 \in C$, 则 $\xi_e(y_1) \leq \xi_e(y_2)$; 如果 $y_2 - y_1 \in \text{int } C$, 则 $\xi_e(y_1) < \xi_e(y_2)$), 且具有凸性.

性质 1^[12] $\forall r \in \mathbb{R}$ 及 $\forall y \in Y$, 非线性标量化函数 ξ_e 有下列性质:

$$\xi_e(y) \geq r \iff y \notin re - \text{int } C$$

这里, $C = \{y \in Y: \varphi(y) \geq 0, \forall \varphi \in C^*\}$, C^* 表示 C 的对偶锥. 如果令 $C^{*0} = \{\varphi \in C^*: \varphi(e) = 1\}$, 则可以得到非线性标量化函数 ξ_e 的以下性质:

$$\forall y \in Y \quad \xi_e(y) = \sup_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(y)$$

接下来介绍一些必要的预备知识.

定义 1 设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 H 中的非空子集, C 是 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间 Y 中的闭凸尖锥, $F: X \rightarrow Y$, $x \in X$.

1) 如果对 Y 中的 0 的任何开邻域 V , 存在 x 在 X 中的开邻域 U , 使 $\forall x' \in U$, 有 $F(x') \in F(x) + V - C$ (或 $F(x') \in F(x) + V + C$), 则称 F 在 x 是 C -上半连续 (或 C -下半连续) 的.

2) 如果 $\forall x \in X$, F 在 x 是 C -上半连续的 (或 C -下半连续的), 则称 F 在 X 上是 C -上半连续的 (或 C -下半连续的).

3) 如果 F 在 X 上既是 C -上半连续的也是 C -下半连续的, 则称 F 在 X 上是 C -连续的.

引理 1^[13] 设 X 是一个度量空间, $\{A_n\}$ 是 X 中的一列非空紧集, $A_n \rightarrow A$, 其中 A 是 X 中的一个非空紧集, 则

1) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cup A$ 是 X 中的紧集;

2) 如果 $x_n \in A_n$, $x_n \rightarrow x$, 则 $x \in A$.

引理 2^[13] 设 $\{A_n\}$ 是度量空间 X 中的一列非空有界闭集, $h(A_n, A) \rightarrow 0$, 其中 A 是 X 中的一个非空紧集, $x_n \in A_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in A$.

3 有限理性模型与约束向量优化问题的良定性定义

在下文中, 如没有做特殊说明, 总假设 X 是一个完备度量空间, A 是 X 中的一个非空紧子集, C 是 Banach 空间 Y 中的闭凸尖锥, 且 $\text{int } C \neq \emptyset$. 考虑下面约束向量优化问题 $\lambda = (F, A)$:

$$\min_{x \in A} F(x)$$

这里, $F: X \rightarrow Y$, 如果存在 $x \in A$ 使 $\forall y \in A$, 有

$$F(x) - F(y) \notin \text{int } C$$

则称这样的 $x \in A$ 是约束向量优化问题 λ 的弱有效解.

接下来, 给出全体约束向量优化问题 λ 的问题空间 Λ 如下:

$$\Lambda = \{\lambda = (F, A) : A \text{ 是 } X \text{ 中的非空紧集}, \exists x \in A \text{ 使 } F(x) - F(y) \notin \text{int } C, \forall y \in A,$$

$$F: X \longrightarrow Y \text{ 在 } X \text{ 上是 } C\text{-连续的且 } \sup_{x \in X} \|F(x)\| < +\infty\}$$

$\forall \lambda_1 = (F_1, A_1), \lambda_2 = (F_2, A_2) \in \Lambda$, 定义距离:

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{x \in X} \|F_1(x) - F_2(x)\| + h(A_1, A_2)$$

这里 h 表示 X 上的 Hausdorff 距离, 容易验证 (Λ, ρ) 是一个度量空间.

引理 3 (Λ, ρ) 是一个完备度量空间.

证 设 $\{\lambda_n = (F_n, A_n)\}$ 是 Λ 中任意一个 Cauchy 序列, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使 $\forall n, m \geq N$, 有:

$$\rho(\lambda_n, \lambda_m) = \sup_{x \in X} \|F_n(x) - F_m(x)\| + h(A_n, A_m) < \varepsilon$$

因 Y 是一个 Banach 空间, 则必存在 $F(x) \in Y$, 使当 $\forall n \geq N$ 时, 有 $\sup_{x \in X} \|F_n(x) - F(x)\| \leq \varepsilon$. 因 X 是完备的, $K(X)$ 也是完备的, 这里 $K(X)$ 表示 X 中的所有非空紧子集. 由 $h(A_m, A_n) < \varepsilon$, 存在 $A \in K(X)$ 使得 $A_n \rightarrow A$. 以下证明 $\lambda = (F, A) \in \Lambda$, 从而 (Λ, ρ) 是一个完备度量空间.

首先, 容易证明 $F: X \longrightarrow Y$ 是 C -连续的且 $\sup_{x \in X} \|F(x)\| \leq +\infty$. 接下来只需证明, 存在 $x \in A$, 使 $\forall y \in A$, 有 $F(x) - F(y) \notin \text{int } C$. 以下用反证法. 假设上述结论不成立, 即存在 $y_0 \in A$, 使 $F(x) - F(y_0) \in \text{int } C$. 此时一定可以找到 Y 中零元素的一个开邻域 V , 使

$$F(x) - F(y_0) + V \subset \text{int } C \quad (1)$$

由 $\lambda_n = (F_n, A_n) \in \Lambda$, 那么存在 $x_n \in A_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 使

$$F_n(x_n) - F_n(y'_n) \notin \text{int } C \quad \forall y'_n \in A_n \quad (2)$$

因 A 和 A_n 是 X 的非空紧集并且 $A_n \rightarrow A$, 由引理 1(1), $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cup A$ 也是 X 的一个紧集且 $\{x_n\} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cup A$, 我们不妨设 $x_n \rightarrow x$. 由引理 1 结论 2, 有 $x \in A$. 因 $y_0 \in A$ 且 $A_n \rightarrow A$, 存在 $y'_n \in A_n (n=1, 2, 3, \dots)$, 使 $y'_n \rightarrow y_0$. 接下来, 由 (2) 式, 有

$$F_n(x_n) - F_n(y'_n) \notin \text{int } C \quad (3)$$

因 $\sup_{x \in X} \|F_n(x) - F(x)\| \rightarrow 0$ 以及 F 在 X 上是 C -连续, 那么一定存在正整数 N , 使 $\forall n \geq N$, 有

$$\begin{aligned} F_n(x_n) - F_n(y'_n) &= (F_n(x_n) - F(x_n)) + (F(y'_n) - F_n(y'_n)) + \\ &\quad (F(x_n) - F(x)) + (F(y_0) - F(y'_n)) + (F(x) - F(y_0)) \in \\ &\quad \frac{V}{4} + \frac{V}{4} + \frac{V}{4} + \frac{V}{4} + (F(x) - F(y_0)) = \\ &\quad F(x) - F(y_0) + V \subset \text{int } C \end{aligned} \quad (4)$$

显然, (4) 式与 (3) 式矛盾.

接下来, 约束向量优化问题的有限理性模型 $M = \{\Lambda, X, f, \Phi\}$ 定义如下:

(i) Λ 是一个完备度量空间, X 也是一个完备度量空间;

(ii) 约束向量优化问题 λ 的可行约束: $f(\lambda) = A$;

(iii) 约束向量优化问题 λ 的弱有效解集:

$$E(\lambda) = \{x \in A : F(x) - F(y) \notin \text{int } C, \forall y \in A\}$$

(iv) 约束向量优化问题 λ 的理性函数:

$$\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_e(F(y) - F(x))\} = \sup_{y \in A} \inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F(x) - F(y))$$

引理 4 1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $f(\lambda)$ 是非空紧集.

2) $\forall x \in f(\lambda)$, $\Phi(\lambda, x) \geq 0$.

3) $\lambda \in \Lambda$, $E(\lambda) \neq \emptyset$; $x \in E(\lambda)$ 当且仅当 $\Phi(\lambda, x) = 0$.

证 1) 显然.

2) $\forall x \in f(\lambda) = A$, 有

$$\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_e(F(y) - F(x))\} \geq -\xi_e(F(x) - F(x)) = 0$$

3) 由 Λ 的定义, $\forall \lambda \in \Lambda$, $E(\lambda) \neq \emptyset$. 如果 $x \in E(\lambda)$, 那么 $\forall y \in A$, $F(x) - F(y) \notin \text{int } C$. 由性质 1, $\forall y \in A$, $\xi_e\{F(y) - F(x)\} \geq 0$. 因此, $\Phi(\lambda, x) \leq 0$. 由于已经证明 $\Phi(\lambda, x) \geq 0$, 这表明 $\Phi(\lambda, x) = 0$.

反过来, 如果 $\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_e(F(y) - F(x))\} = 0$, 则 $\forall y \in A$, $\xi_e(F(y) - F(x)) \geq 0$. 再由性质 1, $\forall y \in A$, $F(y) - F(x) \notin -\text{int } C$, 也就是说, $\forall y \in A$, $F(x) - F(y) \notin \text{int } C$, 这表明 $x \in E(\lambda)$.

引理 5 $\Phi(\lambda, x)$ 在 (λ, x) 是下半连续的.

证 要证 $\Phi(\lambda, x)$ 在 (λ, x) 是下半连续的, 则只需证 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \lambda_n = (F_n, A_n) \rightarrow \lambda = (F, A) \in \Lambda$, $\forall x_n \in A$, $x_n \rightarrow x \in A$, 存在正整数 N , 使 $\forall n \geq N$, 有 $\Phi(\lambda_n, x_n) > \Phi(\lambda, x) - \varepsilon$.

首先, 由上确界定义, 存在 $y_0 \in A$, 使

$$\inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F(x) - F(y_0)) > \Phi(\lambda, x) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

因 $\forall \varphi \in C^{*0}$, 对固定的元 $e \in \text{int } C$, $\varphi(e) = 1$, 那么必存在某个正数 $a > 0$, 使 $\|\varphi\| \leq a$. 因 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 故存在正整数 N_1 , 使 $\forall n \geq N_1$, 有 $\sup_{x \in X} \|F_n(x) - F(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{8a}$. 由于 A 是一个紧子集, 不妨设 $y_n \rightarrow y_0$. 接下来, 由向量值函数 F 在 X 上是连续的, 必存在正整数 N_2 , 使 $\forall n \geq N_2$, 有

$$\|F(x_n) - F(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{8a} \quad \|F(y_n) - F(y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{8a} \quad (6)$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n \geq N$, 由(6)式, 有

$$\|F_n(x_n) - F(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{4a} \quad \|F_n(y_n) - F(y_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4a} \quad (7)$$

由(7)式, 有

$$\begin{aligned} & |\varphi(F_n(x_n) - F(y_n)) - \varphi(F(x) - F(y_0))| = \\ & |\varphi(F_n(x_n) - F(x)) + \varphi(F(y_0) - F(y_n))| \leq \\ & \|\varphi\| \|F_n(x_n) - F(x)\| + \|\varphi\| \|F_n(y_n) - F(y_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

由(8)式, 得

$$\varphi(F_n(x_n) - F(y_n)) > \varphi(F(x) - F(y_0)) - \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$\inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F_n(x_n) - F(y_n)) \geq \inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F(x) - F(y_0)) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

最后由(9)式与(5)式, 有

$$\Phi(\lambda_n, x_n) \geq \inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F_n(x_n) - F(y_n)) \geq \inf_{\varphi \in C^{*0}} \varphi(F(x) - F(y_0)) - \frac{\varepsilon}{2} > \Phi(\lambda, x) - \varepsilon$$

接下来, 利用约束向量优化问题有限理性模型给出这个问题的 Levitin-Polyak 良定性与 Hadamard 良定性的定义. 为了实现这个目标, 首先给出一个重要的引理.

引理 6 $\forall \lambda \in \Lambda$ 和 $\forall \epsilon > 0$, $\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_\epsilon(F(y) - F(x))\} \leq \epsilon$ 成立的充分必要条件是

$$F(x) - F(y) - \epsilon e \notin \text{int } C \quad \forall y \in A$$

证 充分性 如果 $\forall y \in A$, $F(x) - F(y) - \epsilon e \notin \text{int } C$, 则 $\forall y \in A$, $F(y) - F(x) \notin -\epsilon e - \text{int } C$. 由性质 1, 有 $\xi_\epsilon(F(y) - F(x)) \geq -\epsilon$, $\forall y \in A$. 因此,

$$\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_\epsilon(F(y) - F(x))\} \leq \epsilon$$

必要性 如果 $\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall \epsilon > 0$, $\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in A} \{-\xi_\epsilon(F(y) - F(x))\} \leq \epsilon$, 则 $\forall y \in A$, $-\xi_\epsilon(F(y) - F(x)) \leq \epsilon$. 由性质 1, $\forall y \in A$, $F(y) - F(x) \notin -\epsilon e - \text{int } C$. 即

$$F(x) - F(y) - \epsilon e \notin \text{int } C \quad \forall y \in A$$

注 1 由引理 6, $\forall \epsilon_n > 0$ 且 $\epsilon_n \rightarrow 0$, 有如下结果:

(i) 约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 的解集:

$$E(\lambda) = \{x \in X: x \in f(\lambda), \Phi(\lambda, x) = 0\}$$

(ii) 约束向量优化问题 $\lambda_n \in \Lambda (n=1, 2, 3, \dots)$ 的解集:

$$E(\lambda_n) = \{x \in X: x \in f(\lambda_n), \Phi(\lambda_n, x) = 0\}$$

(iii) 约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 的 Levitin-Polyak 逼近解集:

$$E(\lambda, \epsilon_n) = \{x \in X: d(x, f(\lambda)) \leq \epsilon_n, \Phi(\lambda, x) \leq \epsilon_n\}$$

(iv) 约束向量优化问题 $\lambda_n \in \Lambda (n=1, 2, 3, \dots)$ 的 Levitin-Polyak 逼近解集:

$$E(\lambda_n, \epsilon_n) = \{x \in X: d(x, f(\lambda_n)) \leq \epsilon_n, \Phi(\lambda_n, x) \leq \epsilon_n\}$$

由注 1 以及参考文献[5, 11], 约束向量优化问题 λ 的良定性的定义如下:

定义 2 $\forall \lambda \in \Lambda$ 且 $E(\lambda) \neq \emptyset$.

1) 如果 $\forall x_n \in E(\lambda, \epsilon_n)$, $\epsilon_n > 0$ 且 $\epsilon_n \rightarrow 0$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in E(\lambda)$, 则称约束向量优化问题 λ 是广义 Levitin-Polyak 良定的(简称 GLP-wp);

2) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), $\forall x_n \in E(\lambda, \epsilon_n)$, $\epsilon_n > 0$ 且 $\epsilon_n \rightarrow 0$, 必有 $x_n \rightarrow x$, 则称约束向量优化问题 λ 是 Levitin-Polyak 良定的(简称: LP-wp).

定义 3 $\forall \lambda \in \Lambda$ 且 $E(\lambda) \neq \emptyset$.

1) 如果 $\forall \lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\forall x_n \in E(\lambda_n)$, 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in E(\lambda)$, 则称约束向量优化问题 λ 是广义 Hadamard 良定的(简称 GH-wp);

2) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\forall x_n \in E(\lambda_n)$, 必有 $x_n \rightarrow x$, 则称约束向量优化问题 λ 是 Hadamard 良定的(简称 H-wp).

定义 4 $\forall \lambda \in \Lambda$ 且 $E(\lambda) \neq \emptyset$.

1) 如果 $\forall \lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\forall x_n \in E(\lambda_n, \epsilon_n)$, $\epsilon_n > 0$ 且 $\epsilon_n \rightarrow 0$ 必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in E(\lambda)$, 则称约束向量优化问题 λ 是广义良定的(简称 G-wp);

2) 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\forall x_n \in E(\lambda_n)$, 必有 $x_n \rightarrow x$, 则称约束向量优化问题 λ 是良定的(简称 wp).

4 主要结果

定理 1 1) $\forall \lambda \in \Lambda$, 约束向量优化问题 λ 是 G-wp.

2) $\forall \lambda \in \Lambda$, 如果 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), 则约束向量优化问题 λ 是 wp.

证 1) $\forall \lambda_n \in \Lambda, \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall x_n \in E(\lambda_n, \epsilon_n)$ 则 $d(x_n, f(\lambda_n)) \leq \epsilon_n, \Phi(\lambda_n, x_n) \leq \epsilon_n$. 由 $d(x_n, f(\lambda_n)) \leq \epsilon_n$, 必存在 $u_n \in f(\lambda_n)$, 使 $d(x_n, u_n) \rightarrow 0$. 由引理 2, $\{u_n\}$ 存在一个子序列 $\{u_{n_k}\}$ 使 $u_{n_k} \rightarrow x \in f(\lambda)$. 由

$$d(x_{n_k}, x) \leq d(x_{n_k}, u_{n_k}) + d(u_{n_k}, x) \rightarrow 0$$

有 $x_{n_k} \rightarrow x \in f(\lambda)$. 接下来, 由引理 4 与引理 5 得:

$$0 \leq \Phi(\lambda, x) \leq \liminf_{n_k} \Phi(\lambda_{n_k}, x_{n_k}) \leq 0$$

从而 $\Phi(\lambda, x) = 0$, 即 $x \in E(\lambda)$. 因此, 约束向量优化问题 λ 必是 G-wp.

2) 反证法. 如果 $\{x_n\} \not\rightarrow x$, 则存在 x 的开邻域 O 以及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \notin O$. 因 $E(\lambda) = \{x\}$ (单点集), 由 (1) 式的结论, 存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子序列收敛于 x , 这与 $x_{n_k} \notin O$ 矛盾.

推论 1 1) 如果约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 G-wp, 则问题 λ 必是 GLP-wp;

2) 如果约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 wp, 则问题 λ 必是 LP-wp.

证 1) $\forall \lambda_n \in E(\lambda, \epsilon_n), \epsilon_n > 0, \epsilon_n \rightarrow 0$, 定义: $\lambda_n = \lambda (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $\lambda_n \rightarrow \lambda, x_n \in E(\lambda_n, \epsilon_n)$. 因约束向量优化问题 λ 是 G-wp, 故 $\{x_n\}$ 必存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in E(\lambda)$. 因此, 问题 λ 一定是 GLP-wp.

2) 类似于定理 1 中 (2) 的证明过程, 容易得到这一结论.

推论 2 1) 如果约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 G-wp, 则问题 λ 必是 GH-wp;

2) 如果约束向量优化问题 $\lambda \in \Lambda$ 是 wp, 则问题 λ 必是 H-wp.

证 1) $\forall \lambda_n \in \Lambda, \lambda_n \rightarrow \lambda, \forall x_n \in E(\lambda_n)$, 定义 $\epsilon_n = 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $x_n \in E(\lambda_n, \epsilon_n)$. 因约束向量优化问题 λ 是 G-wp, 故 $\{x_n\}$ 必存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in E(\lambda)$. 因此, 问题 λ 一定是 GH-wp.

2) 类似于定理 1 中 (2) 的证明过程, 容易得到这一结论.

参考文献:

- [1] TYKHONOV A N. On the Stability of the Functional Optimization Problem [J]. USSR Comp Math Phys, 1966, 4(1): 28—33.
- [2] LEVITIN E S, POLYAK B T. Convergence of Minimizing Sequences in Conditional Extremum Problems [J]. Soviet Math Dohl, 1966, 7(2): 764—767.
- [3] DONTHEV A L, ZOLEZZI T. Well-Posed Optimization Problems [M]. Berlin: Springer, 1993: 67—72.
- [4] LUCCHETTI R, REVALSKI J. Recent Developments in Well-Posed Variational Problems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995: 75—81.
- [5] YU J. On Well-Posed Problems [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2011, 34(6): 1007—1022.
- [6] HUANG X X, YANG X Q. Levitin-Polyak Well-Posedness of Constrained Vector Optimization Problems [J]. J Global Optim, 2007, 37(5): 287—304.
- [7] HUANG X X, YANG X Q. Further study on the Levitin-Polyak Well-Posedness of Constrained Convex Vector Optimization Problems [J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75(4): 1341—1347.
- [8] ZHU L, XIA F Q. Scalarization Method for Levitin-Polyak Well-Posedness of Vectorial Optimization Problems [J]. Math Meth Oper Res, 2012, 76(3): 361—375.
- [9] LI S J, ZHANG W Y. Hadamard Well-Posed Vector Optimization Problems [J]. J Global Optim, 2010, 46(4): 383—393.

- [10] LI Y Y, ZHU B. The Generalized Solution Space of an Operator and Automatic Well-Posedness [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2001, 26(5): 510—515.
- [11] 刘诗焕, 王丹华, 郑清泉, 等. 一类 Boussinesq 方程初值问题整体解的渐近性 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2010, 35(2): 81—85.
- [12] CHEN G Y, HUANG X X, YANG X Q. Vector Optimization: Set Value and Variational Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 13—20.
- [13] 俞 建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 35—42.

Well-Posedness of Constrained Vector Optimization Problems

DENG Xic-ai^{1, 2}, ZUO Yu²

1. Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang 550025, China;

2. Department of Mathematics and Computer, Guizhou Normal University, Guiyang 550018, China

Abstract: A bounded rationality model M for constrained vector optimization problems is established in this paper. Using this model, the notions of Hadamard well-posedness and Levitin-Polyak well-posedness for vector optimization problems with constraints are introduced. Furthermore, a new well-posedness concept, which unifies the two different notions of well-posedness is obtained. Under the abstract framework, sufficient conditions on the well-posedness for various vector optimization problems with constraints are given.

Key words: well-posedness; vector optimization problem; bounded rationality model

责任编辑 张 杓

