DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.09.015

幂赋范下二维正态向量的极大值分布①

刘芯菱，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：给出了幂赋范下独立同二维正态分布的三角阵列的极大值分布.

关　键　词：二维极大值；正态随机向量；相关系数；幂赋范最大稳定

中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)9-0095-05

假定 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2)$ 是一个二维正态随机向量，其中 X_1, X_2 是标准正态随机变量. 令 $\boldsymbol{X}_i=(X_{i1}, X_{i2})$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的独立样本，$F_{\rho(n)}(x, y)$ 表示二维正态向量 (X_{n1}, X_{n2}) 的分布函数，$\rho(n)$ 表示 X_{n1}，X_{n2} 的相关系数. 定义二维极大值 $\boldsymbol{M}_n$ 如下：

$$\boldsymbol{M}_n=(M_{n1}, M_{n2})=(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_{i1}, \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_{i2})$$

ϕ 及 Φ 分别表示标准正态随机变量的密度函数及分布函数，如果 $\rho(n)$ 满足如下的 Hüsler-Reiss 条件：

$$(1-\rho(n))\log n\rightarrow\lambda^2 \qquad \lambda\in[0, +\infty] \tag{1}$$

且规范常数 b_n 满足

$$b_n=n\phi(b_n) \tag{2}$$

那么，对任意的 $x, y\in\mathbb{R}$，文献[1] 证明了

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_{n1}\leqslant b_n+\frac{x}{b_n}; M_{n2}\leqslant b_n+\frac{y}{b_n}\right)=H_\lambda(x, y) \tag{3}$$

其中 Hüsler-Reiss 最大稳定分布[1] $H_\lambda(x, y)$ 有如下形式

$$H_\lambda(x, y)=\exp\left(-\Phi\left(\lambda+\frac{x-y}{2\lambda}\right)\exp(-y)-\Phi\left(\lambda+\frac{y-x}{2\lambda}\right)\exp(-x)\right) \tag{4}$$

因为

$$H_0(x, y)=\Lambda(\min(x, y)) \qquad H_\infty(x, y)=\Lambda(x)\Lambda(y)$$

所以 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\infty$ 分别表示渐近完全相依和独立，其中 $\Lambda(x)=\exp(-\exp(-x))$ 表示 Gumble 分布.

文献[2-5] 给出了线性赋范下的结果，文献[6-7] 进一步讨论了幂赋范下的各种吸引场. 到目前为止，没有人讨论过幂赋范下二维正态向量的极大值. 我们将给出幂赋范下 $\boldsymbol{M}_n$ 的极大值分布.

为了得到幂赋范下二维正态向量的极值分布，我们必须研究如下规范化后的分布函数

---

① 收稿日期：2013-10-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071199，11171275).

作者简介：刘芯菱(1990-)，男，四川南充人，硕士研究生，主要从事极值理论、极限定理的研究.

通信作者：陈守全，副教授，硕士生导师.

$$F_\rho^n(\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x); \alpha_n \mid y \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(y)) \tag{5}$$

如果 X_1, X_2 是独立的(即 $\rho = 0$),那么极限分布 G_∞ 有如下表示

$$G_\infty(x, y) = \Phi_1(x)\Phi_1(y)$$

如果 $X_1 = X_2$(即 $\rho = 1$),那么极限分布 G_0 有如下表示

$$G_0(x, y) = \exp(-(\min(x, y))^{-1})$$

在下面的定理中,我们将给出一般的结论.

定理 1 如果当 $n \to \infty$ 时,

$$(1 - \rho(n)) \log n \to \lambda^2 \in [0, +\infty] \tag{6}$$

那么,对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F_{\rho(n)}{}^n(\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x); \alpha_n \mid y \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(y)) \to \begin{cases} G_\lambda(x, y) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$G_\lambda(x, y) = \exp\left(-\Phi\left(\lambda + \frac{\log x - \log y}{2\lambda}\right)y^{-1} - \Phi\left(\lambda + \frac{\log y - \log x}{2\lambda}\right)x^{-1}\right)$$

注意到

$$G_0 = \lim_{\lambda \downarrow 0} G_\lambda \qquad G_\infty = \lim_{\lambda \uparrow \infty} G_\lambda$$

为了证明上述结论,首先引用一些来自于文献[8]的结果.

引理 1 若 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布于标准正态分布,即 $X_n \sim \Phi$,那么 $\Phi \in D_p(\Phi_1)$ 且规范常数 α_n, β_n 分别满足 $\alpha_n = b_n$,$\beta_n = \frac{a_n}{b_n}$,其中 $a_n \sim \frac{1}{b_n}$,b_n 由(2)式给出.

由引理 1,容易知道

$$\beta_n = \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{1}{2\log n} \tag{8}$$

$$\Phi^n(\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x)) \to \Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \exp(-x^{-1}) & x > 0 \end{cases} \tag{9}$$

注 1 G_λ 的边际分布跟(9)式相同.

注 2 (9)式是幂赋范下最大稳定的,即

$$\Phi_1{}^n(n \mid x \mid \operatorname{sign}(x)) = \Phi_1(x)$$

这对 G_λ 也成立,即

$$G_\lambda{}^n(n \mid x \mid \operatorname{sign}(x); n \mid y \mid \operatorname{sign}(y)) = G_\lambda(x, y)$$

证 首先,如果 $x < 0$,那么当 $n \to \infty$ 时,

$$\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x) \to -\infty$$

从而,当 $n \to \infty$ 时(5)式收敛于 0,通过类似讨论可以得到 $y < 0$ 时的结果. 即得到(7)式的第二部分的证明.

其次,如果 $x > 0$,$y > 0$,记 $u_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$. 易知

$$\begin{aligned} & F_{\rho(n)}{}^n(u_n(x); u_n(y)) = \\ & \exp(n\log(1 - (1 - F_{\rho(n)}(u_n(x), u_n(y))))) = \\ & \exp(-n(1 - F_{\rho(n)}(u_n(x), u_n(y))) + o(n(1 - F_{\rho(n)}(u_n(x), u_n(y))))) \end{aligned}$$

其中

$$n(1-F_{\rho(n)}(u_n(x),u_n(y)))=n(1-\Phi(u_n(x)))+n(1-\Phi(u_n(y)))-nP(X_1>u_n(x),X_2>u_n(y)) \tag{10}$$

由(9)式,(10)式可得如下极限

$$n(1-\Phi(u_n(x)))\to x^{-1} \tag{11}$$

$$n(1-\Phi(u_n(y)))\to y^{-1} \tag{12}$$

对于(10)式中 $nP(X_1>u_n(x);X_2>u_n(y))$，不失一般性，假定 $\rho(n)\in(-1,1)$. 不然，若 $\rho(n)=1$，$nP(X_1>u_n(x);X_2>u_n(y))=nP(X_1>\max\{u_n(x),u_n(y)\})$，则(5)式收敛于 $G_\infty(x,y)$，若 $\rho(n)=-1$，$nP(X_1>u_n(x);X_2>u_n(y))=nP(-u_n(y)<X_1<u_n(x))=0$，则(5)式收敛于 $G_0(x,y)$.

因为

$$X_1\mid X_2=z\sim N(\rho(n)z,1-\rho^2(n))$$

从而，令 $N=o(\log n)$，有

$$\begin{aligned}&nP(X_1>u_n(x);X_2>u_n(y))=\\&n\int_y^\infty(1-P(X_1\leqslant u_n(x)\mid X_2=u_n(z)))\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)=\\&\int_y^\infty n\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho(n)\ u_n(z)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)=\\&\int_y^N n\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho(n)\ u_n(z)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)+\\&\int_N^\infty n\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho(n)\ u_n(z)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)\end{aligned} \tag{13}$$

其中，(13)式第二部分

$$\begin{aligned}&\int_N^\infty n\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho(n)\ u_n(z)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)\leqslant\\&\int_N^\infty n\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)=\\&n(1-\Phi(u_n(N)))\to\frac{1}{N}\qquad n\to\infty\\&\frac{1}{N}\to 0\qquad N\to\infty\end{aligned} \tag{14}$$

注意到(2)式成立，由(13)式第一部分

$$\begin{aligned}&\int_y^N n\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho u_n(z)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\phi(u_n(z))\mathrm{d}u_n(z)=\\&\int_y^N\left(1-\Phi\left(\frac{u_n(x)-\rho u_n(z)}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)z^{-1}\exp\left(\frac{1}{2}\alpha_n{}^2(1-z^{2\beta_n})+\log\alpha_n{}^2\beta_n+\beta_n\log z\right)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由 $\alpha_n=b_n$，(3)式，(8)式以及 $\exp(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ 可得当 $n\to\infty$ 时，

$$\exp\left(\frac{1}{2}\alpha_n{}^2(1-z^{2\beta_n})+\log\alpha_n{}^2\beta_n+\beta_n\log z\right)\to z^{-1} \tag{15}$$

接下来，假定

$$\lambda^2(n)=\frac{\alpha_n{}^2(1-\rho(n))}{1+\rho(n)}$$

因为 $\alpha_n{}^2 \sim 2\log n$，(8) 式以及当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n{}^2\beta_n \to 1$，$\alpha_n\beta_n \to 0$，所以，当 $n \to \infty$ 时，$\lambda^2(n) \to \lambda^2$. 从而

$$\frac{u_n(x)-\rho(n)\,u_n(z)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}=\frac{\alpha_n x^{\beta_n}-\rho(n)\alpha_n z^{\beta_n}}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}=$$

$$\frac{\alpha_n\left(1+\beta_n\log x+O\left(\left(\frac{1}{\log n}\right)^2\right)\right)-\rho(n)\alpha_n\left(1+\beta_n\log z+O\left(\left(\frac{\log z}{\log n}\right)^2\right)\right)}{(1-\rho^2(n))^{\frac{1}{2}}}=$$

$$\alpha_n\left(\frac{1-\rho(n)}{1+\rho(n)}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\log x-\log z}{(1+\rho(n))\alpha_n\left(\frac{1-\rho(n)}{1+\rho(n)}\right)^{\frac{1}{2}}}\alpha_n{}^2\beta_n+$$

$$\frac{(1-\rho(n))^{\frac{1}{2}}}{(1+\rho(n))^{\frac{1}{2}}}\alpha_n\beta_n\log z+o\left(\frac{(\log\log n)^2}{\log n}\right)=$$

$$\lambda(n)+\frac{\log x-\log z}{(1+\rho(n))\lambda(n)}\alpha_n{}^2\beta_n+\frac{(1-\rho(n))^{\frac{1}{2}}}{(1+\rho(n))^{\frac{1}{2}}}\alpha_n\beta_n\log z+$$

$$o\left(\frac{(\log\log n)^2}{\log n}\right)$$

对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在充分大的 n，使得 $A_1(n) \leqslant z^{-2}+\varepsilon$. 从而，令 $N \to \infty$，由控制收敛定理可以得到(13) 式的右边部分收敛到

$$\int_y^{\infty}\left(1-\Phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log z}{2\lambda}\right)\right)z^{-2}\,\mathrm{d}z \tag{16}$$

注意到，如果 $\lambda=\infty$，那么(16) 式等于 0 ；如果 $\lambda=0$，那么(16) 式等于$(\max(x,\ y))^{-1}$. 显然

$$\int_y^{\infty} z^{-2}\,\mathrm{d}z=y^{-1} \tag{17}$$

再者，利用分部积分，有

$$\int_y^{\infty}\Phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log z}{2\lambda}\right)z^{-2}\,\mathrm{d}z=$$

$$\Phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log y}{2\lambda}\right)y^{-1}-\frac{1}{2\lambda}\int_y^{\infty}\phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log z}{2\lambda}\right)z^{-2}\,\mathrm{d}z=$$

$$\Phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log y}{2\lambda}\right)y^{-1}-x^{-1}\int_y^{\infty}\frac{1}{2\lambda}\phi\left(\lambda+\frac{\log z-\log x}{2\lambda}\right)z^{-1}\,\mathrm{d}z=$$

$$-x^{-1}+\Phi\left(\lambda+\frac{\log x-\log y}{2\lambda}\right)y^{-1}+\Phi\left(\lambda+\frac{\log y-\log x}{2\lambda}\right)x^{-1} \tag{18}$$

结合(10)－(18) 式得(7) 式成立，即定理结论成立.

参考文献：

[1] HÜSLER J，REISS R D. Maxima of Normal Random Vectors：Between Independence and Complete Dependence [J]. Statist Probab Lett，1989，7(4)：283－286.

[2] DE HAAN L. On Regular Variation and Its Applications to the Weak Convergence of Sample Extremes [M]. Mathematical Center Tract，1970：32.

[3] LEADBETTER M R，LINDGREN G，ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York：Springer，1983.

[4] GALAMBOS J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics [M]. New York：Wiley，1978.

[5] RESNICK S. Extreme Value, Regular Variation, and Point Processes [M]. New York: Springer, 1987.

[6] PANCHEVA E. Limit Theorems for Extreme Order Statistics Under Nonlinear Normalization [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1985(1155): 284－309.

[7] MOHAN N R, RAVI S. Max Domains of Attraction of Univariate and Multivariate p-max Stable Laws [J]. Theory Probability and Its Applications, 1993, 37(4): 632－643.

[8] CHEN Shou-quan, WANG Chao, ZHANG Geng. Rates of Convergence of Extreme for General Error Distribution Under Power Normalization [J]. Statist Probab Lett, 2012, 82(2): 385－395.

Maximum Value Distribution of Two-Dimensional Normal Vectors Under Power Normalization

LIU Xin-ling,　CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we derive the limit distribution of maxima of a triangular array of independent identically distributed bivariate normal vectors under power normalization.

Key words: two-dimensional maximum; normal random vectors; correlation coefficient; p-max stable

责任编辑　张　枸