DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.09.019

# 角谱理论的近似公式①

刘普生， 王建东， 刘义东

电子科技大学 物理电子学院，成都 610054

**摘要**：利用平面波角谱公式和球面波的 Weyl 表示式，非常方便地推导出矢量形式的菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射积分公式. 作为特例，只考虑光场的一维横向分量时，可得到标量衍射理论的近似公式——菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射积分公式.

**关 键 词**：角谱理论；球面波 Weyl 表示式；菲涅尔衍射积分公式；夫琅和费衍射积分公式

**中图分类号**：O436.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2014)9-0118-04

平面波角谱理论[1]具有物理图像直观、处理过程简单等优点，在光束传输和衍射等问题中得到广泛应用. 基尔霍夫衍射积分也是常用到的衍射公式，但由于基尔霍夫衍射理论对边界条件过多的限制，使得其有内在的不自恰性[1-2]. 为了克服基尔霍夫衍射积分公式的这个缺陷，瑞利(Rayleigh)和索末菲(Sommerfeld)采用合适的格林函数，得到了衍射场波方程新的解形式，即第一类和第二类瑞利-索末菲(Rayleigh-Sommerfeld，RS)衍射积分公式[1-3].

当光学系统的衍射孔径比照明波长大得多，且观察点离衍射孔径不太近时，用近轴近似的标量衍射理论——菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射积分公式处理的结果是很精确的[4-5]. 对于光束宽度能与波长可相比拟的强聚焦光束，以及有大发散角的光束，需要考虑光束的矢量行为[6]. 此时，一般利用的工具是矢量角谱理论或者矢量基尔霍夫衍射积分公和矢量 RS 衍射积分公式等等[6-8]. 矢量衍射理论中并未考虑过近轴近似的菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射积分的矢量公式. 下面，我们提供一种有趣的思路和推导方法：由矢量角谱公式和球面波 Weyl 表示式，采用稳相原理，得到矢量衍射理论的近似结果，即矢量菲涅尔衍射和夫琅和费衍射积分公式；其中大家熟知的标量结果——菲涅尔衍射和夫琅和费衍射公式，只需考虑光场的横向分量，按本文给出的方法可得到.

## 1 理论推导

在 $z>0$ 半空间任意位置处的电场分量可展开成矢量形式的平面波角谱公式[3,7]

$$\begin{aligned} &E_{\perp}(x, y, z)=\iint_{\infty} A_{\perp}(p, q)\exp[ik(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \qquad \perp = x, y \\ &E_z(x, y, z)=-\iint_{\infty}\left[\frac{p}{m}A_x(p, q)+\frac{q}{m}A_y(p, q)\right]\exp[ik(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{1}$$

其中：$A_{\perp}(p, q)$ 为 $z=0$ 平面处角谱，定义为

① 收稿日期：2013-12-04

基金项目：国家自然科学基金资助项目(61205122)；中央高校基本科研业务费资助项目(ZYGX2011J047，ZYGX2011J039，ZYGX2013J052).

作者简介：刘普生(1975-)，男，江西遂川人，副教授，博士，主要从事现代光学的研究.

$$A_{\perp}(p,q)=\frac{1}{\lambda^2}\iint_{\infty}E_{\perp}(x_0,y_0,0)\exp[-ik(px_0+qy_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{2}$$

式中：$E_{\perp}(x_0,y_0,0)$ 为 $z=0$ 平面处 $x$,$y$ 方向的电场分量，表示为 $E(x_0,y_0,0)=E_x(x_0,y_0,0)\boldsymbol{i}+E_y(x_0,y_0,0)\boldsymbol{j}$（$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 分别为 $x$,$y$ 方向单位矢量），$\lambda$ 为波长，$k=2\pi/\lambda$ 为波数，

$$\begin{cases} m=(1-p^2-q^2)^{1/2} & p^2+q^2\leqslant 1 \\ m=i(p^2+q^2-1)^{1/2} & p^2+q^2>1 \end{cases} \tag{3}$$

将(2)式代入(1)式，分别有

$$\begin{aligned} E_{\perp}(x,y,z)&=\frac{1}{\lambda^2}\iint_{\infty}E_{\perp}(x_0,y_0,0)G_D(x-x_0,y-y_0,z)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \\ E_z(x,y,z)&=-\frac{1}{\lambda^2}\iint_{\infty}[E_x(x_0,y_0,0)G_{D1}(x-x_0,y-y_0,z)+ \\ &\qquad E_y(x_0,y_0,0)G_{D2}(x-x_0,y-y_0,z)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

式中，

$$\begin{aligned} G_D(x-x_0,y-y_0,z)&=\iint_{\infty}\exp\{ik[p(x-x_0)+q(y-y_0)+mz]\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{D1}(x-x_0,y-y_0,z)&=\iint_{\infty}\frac{p}{m}\exp\{ik[p(x-x_0)+q(y-y_0)+mz]\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{D2}(x-x_0,y-y_0,z)&=\iint_{\infty}\frac{q}{m}\exp\{ik[p(x-x_0)+q(y-y_0)+mz]\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{5}$$

### 1.1 矢量形式的菲涅尔衍射积分公式

若 $p^2+q^2\ll 1$，则(3)式中 $m$ 可表示为

$$m=(1-p^2-q^2)^{1/2}\approx 1-\frac{p^2+q^2}{2} \tag{6}$$

将(3)式代入(5)式，并利用(6)式，结果整理得到

$$\begin{aligned} G_D(x-x_0,y-y_0,z)&=\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\infty}\exp\left\{ik\left[p(x-x_0)+q(y-y_0)-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{D1}(x-x_0,y-y_0,z)&=\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\infty}p\exp\left\{ik\left[p(x-x_0)+q(y-y_0)-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{D2}(x-x_0,y-y_0,z)&=\mathrm{e}^{ikz}\iint_{\infty}q\exp\left\{ik\left[p(x-x_0)+q(y-y_0)-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{7}$$

当 $R\gg\lambda$ 时，由稳相法原理[3]，可求得(7)式中稳相点位置

$$p_1=\frac{x-x_0}{z} \qquad q_1=\frac{y-y_0}{z} \qquad m_1=1 \tag{8}$$

代(8)式入(7)式有

$$\begin{aligned} G_D(x-x_0,y-y_0,z)&=\frac{\lambda}{iz}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \\ G_{D1}(x-x_0,y-y_0,z)&=\frac{\lambda}{iz}\frac{x-x_0}{z}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \\ G_{D2}(x-x_0,y-y_0,z)&=\frac{\lambda}{iz}\frac{y-y_0}{z}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

由(9)式和(4)式，结果可整理为

$$E_{p\perp}(x,y,z)=\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{\lambda zi}\iint_{\infty}E_{\perp}(x_0,y_0,0)\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

$$E_{pz}(x,y,z)=\frac{i\mathrm{e}^{ikz}}{\lambda z^2}\iint_{\infty}[E_x(x_0,y_0,0)(x-x_0)+E_y(x_0,y_0,0)(y-y_0)]\times$$

$$\exp\left\{\frac{ik}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{10}$$

其中，垂直分量 $E_{p\perp}(x,y,z)$ 即为熟悉的标量衍射理论近似公式——菲涅尔衍射积分公式[1-2]，(10)式对应为矢量形式的菲涅尔衍射积分公式. 由(10)式推导过程可知，菲涅尔衍射积分公式可看作为平面波角谱理论的傍轴近似结果.

### 1.2　矢量形式的夫琅和费衍射积分公式

代(2)式入(1)式，并利用(6)式，可整理为

$$\begin{aligned} E_\perp(x,y,z) &= \frac{1}{\lambda^2}\iint_\infty E_\perp(x_0,y_0,0)\exp\left[-ik(px_0+qy_0)\right]G_F(x-x_0,y-y_0,z)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \\ E_z(x,y,z) &= -\frac{1}{\lambda^2}\iint_\infty\left[E_x(x_0,y_0,0)G_{F1}(x-x_0,y-y_0,z)+\right. \\ &\qquad \left.E_y(x_0,y_0,0)G_{F2}(x-x_0,y-y_0,z)\right]\exp\left[-ik(px_0+qy_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \end{aligned} \tag{11}$$

式中

$$\begin{aligned} G_F(x-x_0,y-y_0,z) &= \mathrm{e}^{ikz}\iint_\infty\exp\left\{ik\left[px+qy-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{F1}(x-x_0,y-y_0,z) &= \mathrm{e}^{ikz}\iint_\infty p\exp\left\{ik\left[px+qy-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\ G_{F2}(x-x_0,y-y_0,z) &= \mathrm{e}^{ikz}\iint_\infty q\exp\left\{ik\left[px+qy-\frac{z(p^2+q^2)}{2}\right]\right\}\mathrm{d}p\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{12}$$

由稳相法[3]，可求得(12)式中稳相点位置

$$p_2=\frac{x}{z}\qquad q_2=\frac{y}{z}\qquad m_2=1 \tag{13}$$

进一步，(12)式可化为

$$\begin{aligned} G_F(x-x_0,y-y_0,z) &= \frac{\lambda}{iz}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right] \\ G_{F1}(x-x,y-y,z) &= \frac{\lambda}{iz}\,\frac{x}{z}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right] \\ G_{F2}(x-x,y-y,z) &= \frac{\lambda}{iz}\,\frac{y}{z}\mathrm{e}^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

代(14)式入(11)式结果为

$$\begin{aligned} E_{f\perp}(x,y,z) &= \frac{1}{\lambda zi}\exp\left[ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]\iint_\infty E_\perp(x_0,y_0,0)\times \\ &\qquad \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \\ E_{fz}(x,y,z) &= \frac{i}{\lambda z^2}\exp\left[ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]\iint_\infty\left[xE_x(x_0,y_0,0)+yE_y(x_0,y_0,0)\right]\times \\ &\qquad \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \end{aligned} \tag{15}$$

比较(10)和(15)式，可知后者相当于是忽略了衍射孔径大小对位相的影响，所以(15)式可视为平面波角谱理论的傍轴近似后，再作远场近似的结果. (15)式为矢量形式的夫琅和费衍射积分公式，而其中的横向分量即为熟知的标量结果——夫琅和费衍射公式[1-2].

## 2　结　论

从矢量角谱公式出发，利用球面波的 Weyl 表达式和稳相法，采用适当的近似，非常巧妙地推导出矢量形式的菲涅尔衍射和夫琅和费衍射积分公式，而且整个推导过程严谨. 标量衍射理论的近似公式——菲涅尔衍射和夫琅和费衍射积分公式，只需在考虑光场的一维横向分量而得到. 在光传输中，文献中尽管未考

虑使用矢量菲涅尔衍射和夫琅和费衍射公式，但本文提供的推导方法和给出的结果具有一定的参考意义. 可以预见，对于涉及求解光场的矢量场分量时，文中给出的矢量菲涅尔衍射和夫琅和费衍射积分公式也可作为一种参考工具.

**参考文献：**


[1] 古德曼. 傅里叶光学导论 [M]. 秦克诚，刘培森，陈家壁，等，译. 北京：电子工业出版社，2011：28－55.

[2] 马科斯·玻恩. 光学原理 [M]. 7版. 杨葭荪，译. 北京：电子工业出版社，2009：342－427.

[3] LEONARD MANDEL，EMIL WOLF. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. England：Cambridge University Press，1995：109－144.

[4] 王　朴，张丽娟，李建龙. 非匀幅光束在浮雕光栅中的传输特性 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，3(1)：51－56.

[5] 黄永平，赵光普，高曾辉. 高斯-谢尔模光束在湍流大气中的传输特征参数 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(4)：31－36.

[6] 刘普生，吕百达. 非傍轴矢量高斯光束的圆屏衍射 [J]. 物理学报，2004，53(11)：3724－3728.

[7] CARTER WILLIAM H. Electromagnetic Field of a Gaussian Beam with an Elliptical Cross Section [J]. J Opt Soc Am，1972，62(10)：1195－1201.

[8] VISSER TACO D，WIERSMA SJOERD H. Spherical Aberration and the Electromagnetic Field in High-Aperture Systems [J]. J Opt Soc Am A，1972，9(11)：2034－2047.


## Approximate Formulae of the Angular Spectrum Theory


LIU Pu-sheng，　WANG Jian-dong，　LIU Yi-dong

*School of Physical Electronics，University of Electronic Science and Technology of China，Chengdu 610054，China*



**Abstract**：Based on the angular-spectrum representation of a plane wave and the Weyl representation of a spherical wave，the vectorial Fresnel diffraction and Fraunhofer diffraction formulae are readily derived. The scalar Fresnel diffraction and Fraunhofer diffraction formulae can be treated as special cases of our result and deduced by considering only one transversal component of the electric field.



**Key words**：angular spectrum theory；Weyl representation of a spherical wave；Fresnel diffraction integral；Fraunhofer diffraction integral

**责任编辑**　潘春燕