第 36 卷第 10 期 西南大学学报(自然科学版) 2014年10月
Vol. 36 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.001

展形的上界与下界估计①

伍俊良， 韦莹丽

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：展形是一个重要且独特的代数特征量，它主要用于刻画特征值分布的稠密性.首先给出实对称矩阵展形的新的下界估计，然后给出 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵与循环矩阵的展形的上界估计，其结论是对已有结论的扩展.

关 键 词：非负矩阵；实对称矩阵；Toeplitz 矩阵；Hankel 矩阵；循环矩阵；展形

中图分类号：O151.2 **文献标志码：A** **文章编号：**1673-9868(2014)10-0001-05

1956 年，Mirsky 首次定义了矩阵特征值的最大距离

$$s(\boldsymbol{A})=\max_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j| \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

并称之为矩阵的展形[1]，其中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为给定的复矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.作为一个重要的代数特征量，展形本质上是对矩阵特征值分布稠密性的度量.一个矩阵的展形越小，说明它的特征值分布越紧密，反之越稀松.因此展形在许多时候可以用于对矩阵特征值的分布、定位与估计的研究，也可以用于矩阵出现扰动情形时对最佳匹配距离的研究.在文献[1]中，Mirsky 给出了关于矩阵展形的上界估计的一个具有启发性的结果，他用矩阵的范数和迹来刻画了一个矩阵展形的最大上界：

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant\left(2\|\boldsymbol{A}\|^2-\frac{2}{n}|\operatorname{tr}\boldsymbol{A}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这一结果引起许多学者的兴趣，许多作者相继就矩阵展形的上界展开了研究，并得出了一些更好的研究结果(见文献[2-5]).

为叙述方便，本文约定 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$ 阶复矩阵的集合，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\rho(\boldsymbol{A})=\max\{|\lambda_i|: i=1,2,\cdots,n\}$ 代表 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.当 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是实对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值可以排序为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$.近来，文献[2]给出了一类非负矩阵，即满足 $a_{11}=0$ 且 $\rho(\boldsymbol{A})=1$ 的所有 n 阶非负矩阵展形的下界估计的一些结果，我们记这类矩阵的集合为 $M(n)$.本文将继续这一讨论，所不同的是，我们将深化和拓展文献[2]的研究结果，给出此类矩阵展形的新的下界估计，并将其推广到任意实矩阵范畴.同时也给出 3 类重要矩阵，即 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵与循环矩阵的展形的上界估计.

1 实对称矩阵展形的下界

引理 1[2] 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 非负矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{A})=1$.如果 $\boldsymbol{A}$ 有 k 个对角元是 0，则 $s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{k}{n}$.

我们注意到，引理 1 只给出了非负矩阵展形的下界估计，适用范围比较窄，因此很有必要对其进行拓展.我们给出如下定理：

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.记其谱为 $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素中有 k

① 收稿日期：2014-07-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70872123)；重庆市科委基金资助项目(CSTC，2005CE9057).
作者简介：伍俊良(1958-)，男，四川岳池人，博士，教授，博士生导师，主要从事线性与多线性代数问题的研究.
通信作者：韦莹丽，硕士研究生.

个零元素，且 $\rho(\boldsymbol{A})=1$，则 $s(\boldsymbol{A})\geqslant\dfrac{k}{n-1}$.

证 $\boldsymbol{A}$ 是一个实对称矩阵，因此 $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 是一个实数集.

不失一般性，我们记 $\lambda_1=1$，则

$$1-\lambda_i=\lambda_1-\lambda_i\leqslant s(\boldsymbol{A})\qquad i=2,\cdots,n$$

$$1+(n-1)(1-s(\boldsymbol{A}))\leqslant 1+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\tag{1}$$

由于

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\leqslant n-k\tag{2}$$

由(1)式和(2)式可得

$$n-(n-1)s(\boldsymbol{A})\leqslant n-k$$

这样，我们有

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{k}{n-1}$$

注 1 定理1中的结果本质上将引理1的结果提升到一般的实对称矩阵情形，给出了更广泛的一类矩阵展形的下界，且其下界更为精确.

例 1 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的3个特征值分别为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$，$\lambda_3=-\dfrac{1}{2}$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的展形可表示为 $s(\boldsymbol{A})=|\lambda_1-\lambda_3|=\dfrac{3}{2}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 有3个零对角元，故 $n=3$，$k=3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的展形刚好等于定理1中展形估计式中的下界，这表明定理1的结论比引理1的结果更精确.

引理 2[2] 如果一个非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 k 个零对角元素，则

$$\tau_1^m\leqslant(n-k)^{m-1}\tau_m$$

其中 $\tau_k=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^k)$.

引理 3[2] 设 $\boldsymbol{A}\in M(n)$，则

$$s(\boldsymbol{A})>\frac{2}{4+\sqrt{2(n+3)}}\qquad n\geqslant 6$$

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{5}{8+\sqrt{74}}\qquad n=5$$

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{3}\qquad n=4$$

同样，我们可以将引理3的结果拓展到实对称矩阵的情形，并且使其下界更精确. 我们有：

定理 2 如果 $\boldsymbol{A}\in M(n)$，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则

$$s(\boldsymbol{A})>\frac{2}{2+\sqrt{2(n-1)}}\qquad n\geqslant 6$$

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{5}{4+\sqrt{46}}\qquad n=5$$

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{4}{3+\sqrt{21}}\qquad n=4$$

证　为方便表述，我们记 $s(\boldsymbol{A})=s$，如果 $s\geqslant 1$，结论显然成立. 我们假设 $s\in(0,1)$，由引理 1 可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2=s_1^2\leqslant(n-1)s_2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \tag{3}$$

且由于

$$1-\lambda_i=\lambda_1-\lambda_i\leqslant s\qquad i=1,2,\cdots,n$$

所以

$$1+(n-1)(1-s)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

又因为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\leqslant\frac{n(n-1)s^2}{2}$$

则(3) 式可改写为

$$1+(n-1)(1-s)^2\leqslant\frac{n(n-1)}{2}s^2$$

即

$$(n-1)(n-2)s^2+4(n-1)s-2n\geqslant 0$$

从而，当 $n=4$ 时，

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{4}{3+\sqrt{21}}$$

当 $n=5$ 时，

$$s(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{5}{4+\sqrt{46}}$$

当 $n\geqslant 6$ 时，

$$(n^2-3n)s^2+4ns-2n\geqslant 4s-2s^2=2s(2-s)>0$$

即

$$s(\boldsymbol{A})>\frac{2}{2+\sqrt{2(n-1)}}$$

由此可以看出，定理 2 关于 $M(n)$ 中的实对称矩阵展形的下界估计比引理 3 的结论更精确.

2　Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵与循环矩阵展形的上界

Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵与循环矩阵是 3 类比较特殊且重要的矩阵，许多著作都将它们作为重要内容加以介绍. 但很少有人关注这 3 类矩阵展形的上界估计问题. 本节将借助文献[3] 中关于展形的上界的研究结果，结合 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵与循环矩阵的矩阵元素的特点，给出它们展形的上界估计.

文献[3] 改进并深化了许多关于展形研究的重要结果，其中一个结论值得给出并在本文中加以应用：

引理 4[3]　对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$s(\boldsymbol{A})$ 有如下的上界：

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant 2\max_{i=1,\cdots,n}\left\{r_i(\boldsymbol{A})+\left|a_{ii}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\right|\right\}$$

其中

$$r_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}|\qquad i=1,2,\cdots,n$$

基于引理 4，我们可以方便地得到如下结论：

定理 3　对于任何一个 Toeplitz 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

都有

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant 2\max_{i=1,\cdots,n}\left\{\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{j-i}|\right\}$$

证 由引理 4 可知

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant 2\max_{i=1,\cdots,n}\left\{r_i(\boldsymbol{A})+\left|a_{ii}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\right|\right\}$$

在 Toeplitz 矩阵中,

$$r_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{j-i}| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

而

$$\left|a_{ii}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{A}}{n}\right|=0$$

定理 3 得证.

下面，我们讨论 Hankel 矩阵展形的上界问题. 我们首先介绍文献[4]中的一个结论：

引理 5[4] 对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，可得

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant\left(2\sum_{i=1}^{n}(R_i(\boldsymbol{A})C_i(\boldsymbol{A}))^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{n}|\operatorname{tr}\boldsymbol{A}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$C_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ji}| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

定理 4 对于一个 Hankel 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} \end{pmatrix}$$

我们有

$$s(\boldsymbol{A})\leqslant\left(2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{i+j-1}|-\frac{2}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

由引理 5 易证得定理 4 的结论.

同样，根据引理 4，我们可以得到关于循环矩阵的展形的上界估计结果：

定理 5 对于一个循环矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

我们有

$$s(\boldsymbol{A}) \leqslant 2\sum_{i=2}^{n} |a_i|$$

例 2　令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=\mathrm{i}$，$\lambda_4=-\mathrm{i}$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的展形可表示为 $s(\boldsymbol{A})=|\lambda_1-\lambda_2|=2$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为循环矩阵，应用定理 5 的结论可以得到 $s(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的展形刚好等于定理 5 中循环矩阵展形估计式中的上界. 这表明定理 5 的结论对于循环矩阵是最精确的.

参考文献：

[1] MIRSKY L. The Spread of a Matrix [J]. Mathematika，1956，3(2)：127－130.
[2] DRNOVŠEK R. The Spread of the Spectrum of a Nonnegative Matrix with a Zero Diagonal Element [J]. Linear Algebra and Its Applications，2013，439(8)：2381－2387.
[3] WU Jun-liang，ZHANG Ping-ping，LIAO Wen-shi. Upper Bounds for the Spread of a Matrix [J]. Linear Algebra and its Applications，2012，437(11)：2813－2822.
[4] SHARMA R，KUMAR R. Remark on Upper Bounds for the Spread of a Matrix [J]. Linear Algebra and Its Applications，2013，438(11)：4359－4362.
[5] 屠伯埙. 关于矩阵的展形 [J]. 复旦大学学报：自然科学版，1984，23(4)：425－442.
[6] JOHNSON C R. Row Stochastic Matrices Similar to Doubly Stochastic Matrices [J]. Linear Multilinear Algebra，1981，10(2)：113－130.

On the Upper Bounds and the Lower Bounds of the Spread

WU Jun-liang，　WEI Ying-li

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：Spread is an important characteristic algebra value，used to depict the denseness of distribution of eigenvalues. In this paper，we first give some lower bounds on the spread of real symmetric matrices and then some upper bounds on the spreads of Toeplitz matrix，Hankel matrix and cyclic matrix. It is an ascension and expansion of the existing conclusions.

Key words：nonnegative matrix；real symmetric matrix；Toeplitz matrix；Hankel matrix；cyclic matrix；spread

责任编辑　廖　坤