第 36 卷第 10 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2014年10月
Vol. 36　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2014

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.015

非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$ 的优美性①

吴 跃 生

华东交通大学 理学院，南昌 330013

摘要：证明了：当 $h \geqslant 2$ 时，非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$ 是优美图，其中 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})$ 是圈 C_{2h+1} 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})$ -冠，G_m 是任意一个有 m 条边的优美图，$m = h - 1 + \sum\limits_{k=1}^{h} r_{2k}$.

关　键　词：优美图；非连通图；圈；冠

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2014)10－0089－06

本文所讨论的图均为无向简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. 为了简单起见，我们把有 p 个顶点、q 条边的图记为 (p, q) -图. 记号 $[m, n]$ 表示整数集合 $\{m, m+1, m+2, \cdots, n\}$，其中 m 和 n 均为非负整数，且满足 $0 \leqslant m < n$.

图的标号问题是组合数学中一个热门课题.

定义 1[1]　对于图 $G=(V, E)$，如果存在单射 $\theta: V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, |E(G)|\}$，使得对所有边 $e = uv \in E(G)$，由 $\theta'(e) = |\theta(u) - \theta(v)|$ 导出的 $E(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, |E(G)|\}$ 是双射，则称 G 是优美图，θ 是 G 的一组优美标号，称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值.

定义 2[1]　设 f 为 G 的一个优美标号，如果存在正整数 k，使得对任意的 $uv \in E(G)$，有

$$f(u) > k \geqslant f(v)$$

或

$$f(u) \leqslant k < f(v)$$

成立，则称 f 为 G 的平衡标号(或称 G 有平衡标号 f)，且称 k 为 f 的特征. 图 G 称为平衡二分图.

显然，若 f 为 G 的平衡标号，则 k 是边导出标号为 1 的边的两个端点中标号较小的顶点的标号.

定义 3[1]　在平衡二分图 G 中，设其优美标号 θ 的特征为 k，并且 $\theta(u_0) = k$，$\theta(v_0) = k+1$，则称 u_0 为 G 的二分点，v_0 为 G 的对偶二分点.

定义 4[2]　设 G 是一个优美二部图，其优美标号为 θ，$V(G)$ 划分成 2 个集合 X, Y，如果 $\max\limits_{v \in X} \theta(v) < \min\limits_{v \in Y} \theta(v)$，则称 θ 是 G 的交错标号. 称 G 是在交错标号 θ 下的交错图.

事实上，交错图就是平衡图，且 $\max\limits_{v \in X} \theta(v) = k$.

定义 5　设 v_1, v_2 是图 G 中的不相邻的顶点. 连接 v_1, v_2，使图 G 增加一条边所得到的图称为图 $G(v_1 v_2)$.

定义 6[2-12]　$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 中的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边(r_i 为自然数，$i = 1, 2, \cdots, n$)所得到的图称为图 G 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ -冠，简记为 $G(r_1, r_2, \cdots, r_n)$. 特别地，当 $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ 时，称为图 G 的 r -冠. 图 G 的 0 -冠就是图 G.

---

① 收稿日期：2013－06－07

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11261019，11361024).

作者简介：吴跃生(1959－)，男，江西瑞金人，副教授，主要从事图论的研究.

引理1[1] 设路 P_n 的$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$-冠的顶点集如图1所示. 当 $n=2h+1$ (h, r_i 为任意自然数, $i=1,2,\cdots,n$)时, 路 P_n 的$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$-冠是平衡二分图. 存在平衡标号 θ, 使得 $\theta(v_1)=0$. 毛虫树 $P_n(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 关于平衡标号 θ 的二分点为 v_n.

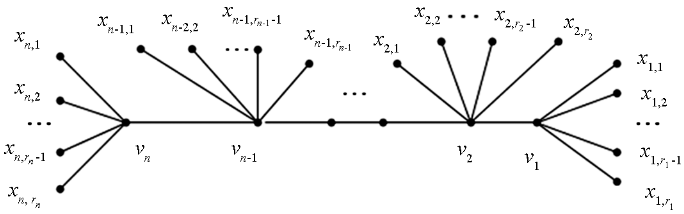

图1 路 P_n 的$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$-冠

根据引理1给出路 P_5 的(1, 2, 3, 4, 5)-冠交错标号, 如图2所示.

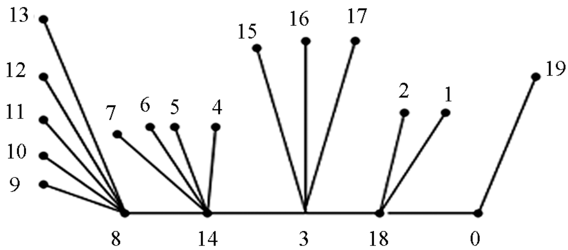

图2 路 P_5 的(1, 2, 3, 4, 5)-冠的交错标号

引理2 当 $k \geqslant 2$ 时, (p, q)-图 G 是特征为 k 的平衡二分图, H_{k-1} 是边数为 $k-1$ 的优美图, 则非连通图 $G(v_1v_2) \cup H_{k-1}$ 是优美的.

证 设 $V(G)$ 划分成2个集合 X, Y. $v_1, v_2 \in X$, θ 是图 G 的平衡标号, 且 $\theta(v_1)=0$, $\theta(v_2)=k$, 即 v_2 是平衡二分图 G 的二分点, f 是图 H_{k-1} 的优美标号.

定义图 $G(v_1\ v_2) \cup H_{k-1}$ 的顶点标号 θ_1 为

$$\theta_1(u)=\begin{cases}\theta(u) & u \in X \\ \theta(u)+k & u \in Y \\ f(u)+k+1 & u \in H_{k-1}\end{cases}$$

下面证明标号 θ_1 是图 $G(v_1v_2) \cup H_{k-1}$ 的优美标号.

由于 $\theta_1: X \longrightarrow [0, k]$ 是单射, $\theta_1: Y \longrightarrow [2k+1, q+k]$ 是单射, $\theta_1: H_{k-1} \longrightarrow [k+1, 2k]$ 是单(或双)射, $\underset{u \in X}{\theta_1(u)} < \underset{u \in V(H_{k-1})}{\theta_1(u)} < \underset{u \in Y}{\theta_1(u)}$, 容易验证:

$$\theta_1: V(G(v_1v_2) \cup G_{k-1})=V(G) \cup V(G_{k-1}) \longrightarrow [0, q+k]$$

是单射.

由点标号 θ_1 导出的边标号 θ'_1 为:

$$\{\theta'_1(e) \mid e \in E(G(v_1v_2))\}=$$
$$\{\theta'_1(e) \mid e \in E(G) \cup \{\theta'_1(v_1v_2)\}=[k+1, q+k] \cup \{k\}=[k, q+k]$$
$$\{\theta'_1(e) \mid e \in E(H_{k-1})\}=[1, k-1]$$

当 $k \geqslant 2$ 时, 容易验证: $\theta'_1: E(G(v_1v_2) \cup G_{k-1}) \longrightarrow [1, q+k]$ 是双射.

因此 θ_1 是图 $G(v_1v_2) \cup H_{k-1}$ 的优美标号.

定理1 当 h, r_i 为自然数 ($h \geqslant 2$, $i=1,2,\cdots,2h+1$)时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$ 是优美的, 其中 G_m 是任意一个有 m 条边的优美图, $m=h-1+\sum\limits_{k=1}^{h} r_{2k}$.

证 因为 $V(C_{2n+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}))=V(P_{2n+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}))$, 设 θ 就是引理1中给出的图 $P_{2n+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})$ 的平衡标号,

$$V(P_{n+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}))=X \cup Y$$

$$X = \{v_{j-1},\ x_{ji}\} \qquad j = 2,4,\cdots,2h+2;\ i = 1,2,\cdots,r_j$$
$$Y = \{v_{j+1},\ x_{ji}\} \qquad j = 1,3,\cdots,2h-1;\ i = 1,2,\cdots,r_j$$

满足

$$\max_{v \in X}\theta(v) = \theta(v_{2h+1}) = h + \sum_{k=1}^{h} r_{2k} < \min_{v \in Y}\theta(v) = h + 1 + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$$
$$\theta(v_1) = 0 \qquad \theta(v_{2h+1}) = h + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$$

由引理2知：当 h, r_i 为自然数($h \geqslant 2$, $i = 1,2,\cdots,2h+1$)时，非连通图 $P_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})(v_1, v_{2h+1}) \cup G_m$ 是优美的，其中 G_m 是任意一个有 m 条边的优美图，$m = h - 1 + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$. 而非连通图 $P_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})(v_1, v_{2h+1}) \cup G_m$ 就是 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$. 证毕.

根据定理 1 给出非连通图 $C_5(1, 2, 3, 4, 5) \cup \mathrm{St}(7)$ 的优美标号，如图 3 所示. 根据定理 1 给出非连通图 $C_5(1, 2, 3, 4, 5) \cup C_7$ 的优美标号，如图 4 所示. 根据定理 1 给出非连通图 $C_7(2, 0, 0, 2, 2, 3, 4) \cup \mathrm{St}(7)$ 的优美标号，如图 5 所示. 根据定理 1 给出非连通图 $C_{17} \cup C_7$ 的优美标号，如图 6 所示.

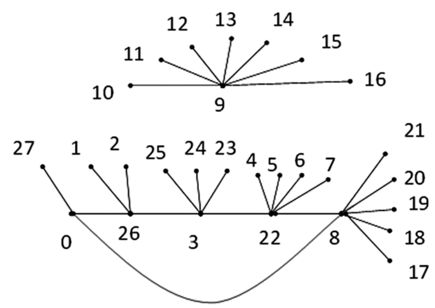

图 3　图 $C_5(1, 2, 3, 4, 5) \cup \mathrm{St}(7)$ 的优美标号

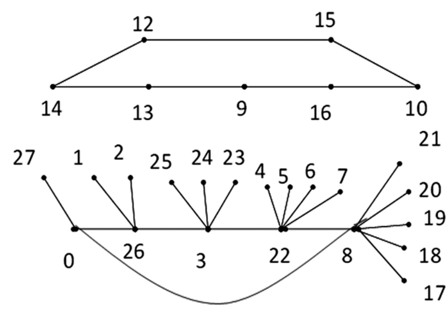

图 4　图 $C_5(1, 2, 3, 4, 5) \cup C_7$ 的优美标号

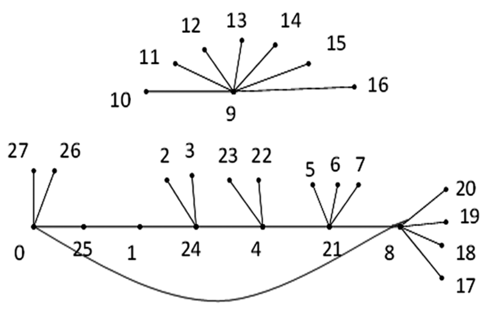

图 5　图 $C_7(2, 0, 0, 2, 2, 3, 4) \cup \mathrm{St}(7)$ 的优美标号

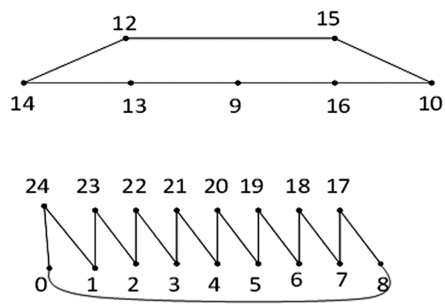

图 6　图 $C_{17} \cup C_7$ 的优美标号

在定理 1 中，令 $r_i = 0$ ($i = 1,2,\cdots,2h+1$)，有：

推论 1　当 h 为自然数，$h \geqslant 2$ 时，非连通图 $C_{2h+1} \cup G_{h-1}$ 是优美的，其中 G_{h-1} 是任意一个有 $h-1$ 条边的优美图，这正是文献[8]的结论.

在定理 1 中，令 $G_m = \mathrm{St}(m)$($\mathrm{St}(m)$ 表示有 $m+1$ 个顶点或有 m 条边的星形树)，有：

推论 2　当 h, r_i 为自然数($h \geqslant 2$, $i = 1,2,\cdots,2h+1$)，$m = h - 1 + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时，非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup \mathrm{St}(_m)$ 是优美的.

在定理 1 中，令 $G_m = P_{m+1}$(P_{m+1} 表示有 $m+1$ 个顶点或有 m 条边的路)，有：

推论 3　当 h, r_i 为自然数($h \geqslant 2$, $i = 1,2,\cdots,2h+1$)，$m = h - 1 + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时，非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup P_{m+1}$ 是优美的.

在定理 1 中，令 $G_m = T_{m+1}$(P_{m+1} 表示有 $m+1$ 个顶点或有 m 条边的优美树)，有：

推论 4 当 h, r_i 为自然数($h \geqslant 2$, $i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup T_{m+1}$ 是优美的.

在定理 1 中, 令 $G_m = C_{4s-1}$, 有:

推论 5 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $4s-1 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup C_{4s-1}$ 是优美的.

在定理 1 中, 令 $G_m = C_{4s}$, 有:

推论 6 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $4s = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup C_{4s}$ 是优美的.

在定理 1 中, 令 $G_m = 3C_{4s} \cup C_{4s+3}$, $m = 16s+3$, 由文献[13]知, $3C_{4s} \cup C_{4s+3}$ 是优美图, 有:

推论 7 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 16s+3$, $16s+3 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 3C_{4s} \cup C_{4s+3}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 3C_{4s} \cup C_{4s+4}$, $m = 16s+4$, 由文献[13]知, $3C_{4s} \cup C_{4s+4}$ 是优美图, 有:

推论 8 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 16s+4$, $16s+4 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, 非连通图 $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 3C_{4s} \cup C_{4s+4}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 3C_{8s} \cup C_{8s-1}$, $m = 32s-1$, 由文献[13]知, $3C_{8s} \cup C_{8s-1}$ 是优美图, 有:

推论 9 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 32s-1$, $32s-1 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 3C_{8s} \cup C_{8s-1}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 2C_{2s}$, $m = 4s$, 由文献[14]知, $2C_{2s}$ 是优美图, 有:

推论 10 当 h, s 为自然数($h \geqslant 2$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 4s$, $4s = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 2C_{2s}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = C_{4s} \cup C_{8s}$, $m = 12s$, 由文献[15]知, $C_{4s} \cup C_{8s}$ 是优美图, 有:

推论 11 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 12s$, $12s = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup C_{4s} \cup C_{8s}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = C_{4s+3} \cup C_{8s}$, $m = 12s+3$, 由文献[15]知, $C_{4s+3} \cup C_{8s}$ 是优美图, 有:

推论 12 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 12s+3$, $12s+3 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup C_{4s+3} \cup C_{8s}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 2C_{4s} \cup C_{8s-1}$, $m = 16s-1$, 由文献[16]知, $2C_{4s} \cup C_{8s-1}$ 是优美图, 有:

推论 13 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 16s-1$, $16s-1 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 2C_{4s} \cup C_{8s-1}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 2C_{4(3s+1)} \cup C_{4(2s+1)}$, $m = 32s+12$, 由文献[16]知, $2C_{4(3s+1)} \cup C_{4(2s+1)}$ 是优美图, 有:

推论 14 当 h, s 为自然数($h \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), r_i 为自然数($i = 1,2,\cdots,2h+1$), $m = 32s+12$, $32s+12 = h-1+\sum_{k=1}^{h} r_{2k}$ 时, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup 2C_{4(3s+1)} \cup C_{4(2s+1)}$ 是优美图.

在定理 1 中, 令 $G_m = 2C_{4(3s-1)} \cup C_{8s-1}$, $m = 32s-9$, 由文献[16]知, $2C_{4(3s-1)} \cup C_{8s-1}$ 是优美图, 有:

推论 15　当 h,s 为自然数($h\geqslant 1$，$s\geqslant 1$)，r_i 为自然数($i=1,2,\cdots,2h+1$)，$m=32s-9$，$32s-9=h-1+\sum_{k=1}^{h}r_{2k}$ 时，$C_{2h+1}(r_1,r_2,\cdots,r_{2h+1})\cup 2C_{4(3s-1)}\cup C_{8s-1}$ 是优美图.

在定理 1 中，令 $G_m=5C_{4s}$，$m=20s$，由文献[17]知，$5C_{4s}$ 是优美图，有：

推论 16　当 h,s 为自然数($h\geqslant 1$，$s\geqslant 1$)，r_i 为自然数($i=1,2,\cdots,2h+1$)，$m=20s$，$20s=h-1+\sum_{k=1}^{h}r_{2k}$ 时，$C_{2h+1}(r_1,r_2,\cdots,r_{2h+1})\cup 5C_{4s}$ 是优美图.

一般地，由定理 1 知，由图 G_m 的优美标号可以构造出非连通图 $G_m\cup C_{2h_1+1}(r_{11},r_{12},\cdots,r_{1(2h_1+1)})$ 的优美标号，其中 $m=h_1-1+\sum_{k=1}^{h1}r_{1(2k)}$；由非连通图 $G_m\cup C_{2h_1+1}(r_{11},r_{12},\cdots,r_{1(2h_1+1)})$ 的优美标号可以构造出非连通图 $G_m\cup C_{2h_1+1}(r_{11},r_{12},\cdots,r_{1(2h_1+1)})\cup C_{2h_2+1}(r_{21},r_{22},\cdots,r_{2(2h_2+1)})$ 的优美标号，其中 $m+\sum_{k=1}^{2h_1+1}r_{1k}=h_2-1+\sum_{k=1}^{h_2}r_{2(2k)}$；由非连通图 $G_m\cup C_{2h_1+1}(r_{11},r_{12},\cdots,r_{1(2h_1+1)})\cup C_{2h_2+1}(r_{21},r_{22},\cdots,r_{2(2h_2+1)})$ 的优美标号可以构造出非连通图 $G_m\cup C_{2h_1+1}(r_{11},r_{12},\cdots,r_{1(2h_1+1)})\cup C_{2h_2+1}(r_{21},r_{22},\cdots,r_{2(2h_2+1)})\cup C_{2h_3+1}(r_{31},r_{32},\cdots,r_{3(2h_2+1)})$ 的优美标号，其中 $m+\sum_{k=1}^{2h_1+1}r_{1k}+\sum_{k=1}^{2h_2+1}r_{2k}=h_3-1+\sum_{k=1}^{h_3}r_{3(2k)}$；…；此种构造过程可以无限进行下去，有：

推论 17　当 h_j,k 为自然数($h_j\geqslant 1$)，r_{ji} 为自然数($i=1,2,\cdots,2h_j+1$)，$m+\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=1}^{2h_i+1}r_{ik}=h_j-1+\sum_{k=1}^{hj}r_{j(2k)}(j=1,2,\cdots,k)$ 时，非连通图 $G_m\bigcup_{i=1}^{k}C_{2h_i+1}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{i(2h_i+1)})$ 是优美图.

在推论 17 中，令 $G_m=C_3(r_{01},r_{02},r_{03})$ ($m=3+r_{01}+r_{02}+r_{03}$)，$h_j=1$ ($j=1,2,\cdots,k$)，由文献[18]知，$C_3(r_{01},r_{02},r_{03})$ 是优美图，有：

推论 18　当 k 为自然数，r_{ji} 为自然数($i=1,2,3$；$j=0,1,2,\cdots,k$)，$\sum_{i=0}^{j-1}|E(C_3(r_{i1},r_{i2},r_{i3}))|=r_{j2}$，即 $3j+\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=1}^{3}r_{ik}=r_{j2}(j=1,2,\cdots,k)$ 时，非连通图 $\bigcup_{i=0}^{k}C_3(r_{i1},r_{i2},r_{i2})$ 是优美图.

根据推论 18 给出非连通图 $C_3(1,2,3)\cup C_3(2,9,3)$ 的优美标号，如图 7 所示. 根据定理 1 给出非连通图 $C_3(1,2,3)\cup C_3(2,9,3)\cup C_3(2,26,3)$ 的优美标号，如图 8 所示.

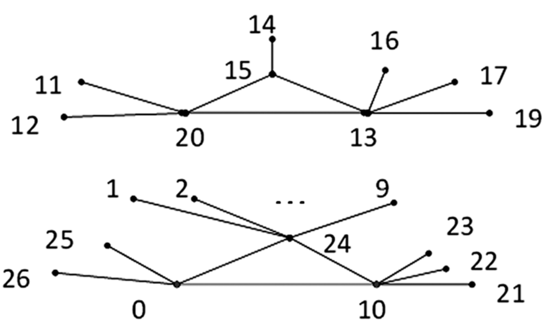

图 7　图 $C_3(1,2,3)\cup C_3(2,9,3)$ 的优美标号

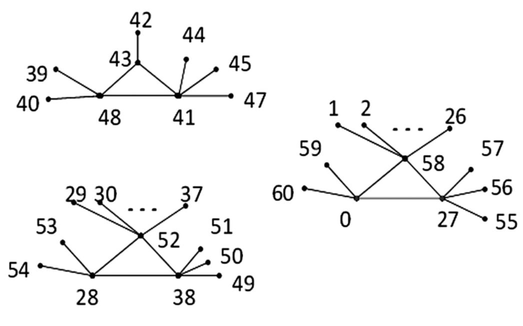

图 8　图 $C_3(1,2,3)\cup C_3(2,9,3)\cup C_3(2,26,3)$ 的优美标号

参考文献：

[1]　马杰克. 优美图[M]. 北京：北京大学出版社，1991.

[2]　吴跃生，李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4h})$-冠的优美性[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2011，32(6)：1-4.

[3]　DESHMUKH U N. Gracefulness of Same Union Graphs [D]. Indai，Bombay：University of Bombay，1995.

[4] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的(r_1, r_2, …, r_{4h})-冠的优美性 [J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77-80.

[5] 吴跃生. 关于图 $P^3_{6k+5} \cup P^3_n$ 的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 4-7.

[6] 吴跃生, 徐保根. 两类非连通图 ($P_2 \vee \overline{K_n}$)(0, 0, r_1, 0, …, 0, r_n) ∪ St(m) 及($P_2 \vee \overline{K_n}$)(r_1+a, r_2, 0, …, 0) ∪ G_r 的优美性 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(5): 63-66.

[7] 吴跃生. 图 C_7(r_1, r_2, r_3, , r_4, r_5, 0, 0) ∪ St(m) 的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(5): 9-1.

[8] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性 [J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(6): 26-29.

[9] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 关于 $C_{4h+1} \odot k_1$ 的(St(r_1), St(r_2), …, St(r_{4h+1}), $G\,r_{4h+2}$)-冠的优美性 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2013, 48(4): 25-27.

[10] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的(G_{r_1}, G_{r_2}, …, $G_{r_{4h+3}}$)-冠的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2013, 34(4): 4-9.

[11] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $C^{(2)}_{4k+2} \cup G_m$ 的优美性 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2013, 38(12): 19-23.

[12] 吴跃生. 非连通图 $G_{+e} \cup H_{k-1}$ 的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2014, 35(2): 3-5.

[13] 段滋明, 薛秀谦, 杨 铀. 4 个圈不交并图优美性的一些结果 [J]. 中国矿业大学学报: 自然科学中文版, 2003, 32(1): 100-102.

[14] 何 梅. 图 $2C_n$ 的优美性 [J]. 内蒙古大学学报: 自然科学版, 1995, 26(3): 247-251.

[15] 董俊超, 马美杰. 一些圈的并的优美性 [J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2000, 24(1): 25-26.

[16] 董俊超. $C_{4k} \cup C_{4k} \cup C_m$ 的优美性 [J]. 烟台大学学报: 自然科学与工程版, 1999, 12(4): 238-241.

[17] 张红霞. 非连通图 $5C_{4k}$ 的优美性 [J]. 曲阜师范大学学报: 自然科学版, 2012, 38(3): 53-55.

[18] 吴跃生. 圈 C_3 的(r_1, r_2, r_3)-冠都是优美的 [J]. 河南教育学院学报: 自然科学版, 2012, 21(1): 15-17.

Gracefulness of Unconnected Graph $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$

WU Yue-sheng

School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China

Abstract: The present paper proves that if $h \geqslant 2$ then unconnected graph $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1}) \cup G_m$ is a graceful graph, where C_{2n+1} is $(2n+1)$-vertex cycle, $C_{2h+1}(r_1, r_2, \cdots, r_{2h+1})$ is the $(r_1, r_2, \cdots, r_{2n+1})$-corona of the cycle C_{2n+1}, and G_m is a graceful graph with m edges, $m = h - 1 + \sum_{k=1}^{h} r_{2k}$.

Key words: graceful graph; unconnected graph; cycle; corona

责任编辑 廖 坤