第 36 卷第 10 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2014年10月
Vol. 36　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.016

Lyubeznik 分解为极小自由分解的单项式理想①

郭　锦[1,2]，　武同锁[2]

1. 海南大学 信息学院，海口 570228；2. 上海交通大学 数学系，上海 200240

摘要：对于一个单项式理想 I，其极小生成元集记为 $G(I)$. 如果在 $G(I)$ 上存在一个全序，使得相应的 Lyubeznik 分解为 I 的极小自由分解，则称 I 为一个 Lyubeznik 理想. 给出了 Lyubeznik 理想的判别与性质，并进一步研究了几类重要的 Lyubeznik 理想.

关　键　词：Lyubeznik 理想；极小覆盖；极小自由分解

中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2014)10-0095-03

设 $S=K[x_1, \cdots, x_n]$ 为域 K 上的多项式环. 已知对于 S 的任意一个理想 I，都存在极小自由分解(参见文献[1-2]). 但对于极小自由分解的具体形式，却没有统一的描述. 因此，具体刻画理想 I 的极小自由分解是一个重要而有趣的研究课题.

对于 S 的任一单项式理想 I，都可以直接写出其泰勒分解，因而给出了其自由分解的一种具体形式. 但泰勒分解离极小自由分解往往相差甚远. 对于单项式理想 I，也可以给出其 Lyubeznik 分解(详见文献[3]). 尽管 Lyubeznik 分解也不一定是极小的，但相比于泰勒分解而言，Lyubeznik 分解往往更接近于极小自由分解. 关于极小自由分解的相关研究，可参考文献[4-8].

设 $G(I)=\{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$ 为理想 I 的极小生成元集. 对于 $G(I)$ 的任一子集 C，称 C 中所有单项式的最小公倍式为 C 的度数，记为 $m(C)$. 如果 $G(I)$ 中单项式 u 整除 $m(C\backslash\{u\})$，则称 C 覆盖 u，或称 u 被 C 覆盖，记为 $u\square C$. $G(I)$ 的子集 $\overline{C}=\{v\in G(I): v\mid m(C)\}$ 称为由 C 诱导的完全覆盖. 如果 C 是某个单项式 u 的覆盖，且不存在 $G(I)$ 中单项式 v 及其覆盖 C'，使得 $m(C')$ 是 $m(C)$ 的真因子，则称 C 为 $G(I)$ 的 M-极小覆盖. 相应地，如果 C 是 u 的覆盖，并且任意 C 的真子集都不是 u 的覆盖，则称 C 为 u 的 E-极小覆盖. 例如，在理想 $I=(x^4, y^4, x^3y, xy^3, x^2y^2)$ 中，子集 $\{x^4, y^4, x^2y^2\}$ 是 x^2y^2 的 E-极小覆盖，但不是 x^2y^2 的 M-极小覆盖.

设 C 为单项式 u 的覆盖. 如果 C 的子集 D 有与 C 相同的度数，但 D 的任一真子集都不具有与 C 相同的度数，则称 D 为 C 的外集. 显然，C 的外集并不一定唯一. 如果单项式 v 属于 C 的任意一个外集，则称 v 为 C 的外点. C 的所有外点的集合记为 $\mathscr{O}(C)$. 相应地，如果单项式 v 不属于 C 的任意一个外集，则称 v 为 C 的内点. C 的所有内点的集合记为 $\mathscr{I}(C)$. C 中其它的单项式称为 C 的边界点，C 中所有边界点的集合记为 $\mathscr{B}(C)$. 如果 $u\in C\backslash\mathscr{I}(C)$，并且对于 C 的任一含 u 的外集 D 以及 $C\backslash D$ 中的任一元素 v，都有 $m((D\backslash\{u\})\cup\{v\})=m(D)$，则称 u 为 C 的可换点. C 中所有可换点的集合记为 $\mathscr{E}(C)$. 从定义易见 $\mathscr{E}(C)\subseteq\mathscr{B}(C)$.

设 $\prec$ 为 $G(I)$ 上的一个全序. 对于 $G(I)$ 的子集 D，如果存在 $u\in G(I)$，使得 $u\mid m(D)$，并且 $u\prec\min(D)$，则称 D 被 u 破坏. 如果 D 的任意子集都不被破坏，则称 D 为完整的.

① 收稿日期：2014-01-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (11271250).
作者简介：郭　锦(1983-)，男，湖南湘潭人，讲师，主要从事交换代数的研究.

1 Lyubeznik 理想的判别与性质

下面的结论可以通过直接验证得到：

定理1 设 I 为多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的单项式理想，其极小生成元集为 $G(I)=\{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$. 则以下结论等价：

(i) I 是一个 Lyubeznik 理想；

(ii) 在 $G(I)$ 上存在一个全序 $\prec$，使得对于 $G(I)$ 中的任一元素 u，u 的任一 E-极小覆盖 C 都不完整；

(iii) 在 $G(I)$ 上存在一个全序 $\prec$，使得对于 $G(I)$ 中的任一元素 u 和 u 的任一 E-极小覆盖 C，都存在 C 的子集 D，使得 $\min(\overline{D}\backslash D) \prec \min(D)$.

设 I 为 Lyubeznik 理想，即存在全序集：$u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_s$，使得与之相关的 Lyubeznik 分解为极小自由分解. 对于 $G(I)$ 的任意外点 u_i，如果改变这个全序，使得 u_i 成为 $G(I)$ 中最大元素而保持其它元素的大小关系，于是得到一个新的全序 $\vdash$：$u_1 \vdash \cdots \vdash u_{i-1} \vdash u_{i+1} \vdash \cdots \vdash u_s \vdash u_i$. 容易验证理想 I 关于新的全序 $\vdash$ 的 Lyubeznik 分解仍然是一个极小自由分解.

由归纳可知以下结论成立：

命题1 如果 I 是 Lyubeznik 理想，并且 $\mathscr{O}(G(I))=\{u_{j1} \cdots u_{jb}\}$，则在 $G(I)$ 上存在一个以下形式的全序 $\prec$：$u_{i1} \prec \cdots \prec u_{ia} \prec u_{j1} \prec \cdots \prec u_{jb}$，使得 I 的关于该全序的 Lyubeznik 分解为极小自由分解.

命题2 设 I 为与全序 $\prec$ 相关的 Lyubeznik 理想. 如果 C 是 $G(I)$ 的 M-极小完全覆盖，那么 $\mathscr{I}(C) \neq \varnothing$ 或者 $\mathscr{E}(C) \neq \varnothing$. 并且以下情形之一成立：

(i) $\mathscr{I}(C) \neq \varnothing$，此时 $\min(\mathscr{I}(C)) \prec \min(C\backslash \mathscr{I}(C))$；

(ii) $\mathscr{I}(C) = \varnothing$ 且 $\mathscr{E}(C) \neq \varnothing$，此时 $\min(\mathscr{E}(C)) \prec \min(C\backslash \mathscr{E}(C))$.

证 假设 $\mathscr{I}(C) \neq \varnothing$，可以断言 C 中最小元素 u 一定属于 $\mathscr{I}(C)$. 反设 $u \notin \mathscr{I}(C)$，则存在 C 的外集 D 包含 u. 由于 $\mathscr{I}(C) \neq \varnothing$，可取 $\mathscr{I}(C)$ 中的元素 v. 易见，$D \cup \{v\}$ 是 v 的 E-极小覆盖. 下面证明 $D \cup \{v\}$ 是完整的. 对于 $D \cup \{v\}$ 的任一子集 E，如果 $u \in E$，则显然 E 不被任何元素破坏；如果 $u \notin E$，考虑到 $v \in \mathscr{I}(C)$，因而 E 中不可能包含 C 的外集. 因此，$m(E)$ 是 $m(D)$ 的真因子. 由于 C 是 $G(I)$ 的 M-极小完全覆盖，因此，E 不能覆盖 $G(I)$ 中任何元素，从而不可能被破坏. 这就表明 $D \cup \{v\}$ 是完整的. 由定理1得到矛盾.

假设 $\mathscr{I}(C)=\varnothing$，可以断言 $\mathscr{E}(C) \neq \varnothing$，并且 C 中最小元素 u 属于 $\mathscr{E}(C)$. 反设 C 中最小元素不是可换点，则存在 C 的外集 F，使得 $u \in F$，且在 $C\backslash F$ 中存在元素 v，使得 $m(F \cup \{v\}\backslash\{u\})$ 是 $m(F)$ 的真因子. 仿照上一段的讨论可知 $F \cup \{v\}$ 是完整的. 同样由定理1得到矛盾.

2 几类重要的 Lyubeznik 理想

如果单项式 $u \in G(I)$ 为任意一个完全覆盖的内点，则称 u 为绝对内点. 如果 $G(I)$ 中含有绝对内点，则称 I 为锥理想. 若在 $G(I)$ 上以某个绝对内点为最小元素构造一个全序 $\prec$，则与 $\prec$ 相关的 Lyubeznik 分解即为 I 的一个极小自由分解. 因此，以下的命题是明显的：

命题3 任意一个锥理想都是一个 Lyubeznik 理想.

设 u 为 $G(I)$ 中的单项式，若对任一覆盖 C(不一定是 u 的覆盖)，要么 $u \notin C$，要么 u 是 C 的内点，则称 u 为 c-内点. 如果 $G(I)$ 的每一个 M-极小完全覆盖都含有一个 c-内点，则称 I 为 M-锥理想. 对于 M-锥理想 I，可在 $G(I)$ 上构造全序 $\prec$，使得对于这个序关系而言，所有 c-内点都小于 $G(I)$ 中其它元素. 通过直接检验可知，I 关于全序 $\prec$ 的 Lyubeznik 分解即为一个极小自由分解. 因此，下面的命题成立：

命题4 任意一个 M-锥理想都是 Lyubeznik 理想.

设单项式理想 I 的极小生成元集 $G(I)=\{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$，其中 $u_i = x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \cdots x_n^{b_{in}}$. 如果对于任意 i，$j \in [s]$ 以及任意 $k \in [n]$，都有 $b_{ik} \neq b_{jk}$，则称 I 为 generic 单项式理想. 对于 generic 理想 I，如果对任意 $u_i, u_j \in G(I)$，当存在 $k \in [n]$，使得 $0 < b_{ik} < b_{jk}$ 时，则对任意 $k \in [n]$，要么 $b_{ik} < b_{jk}$，要么 $b_{jk}=0$，这样的理想 I 称为 mean 理想. 对于 mean 理想 I，可在 $G(I)$ 上定义如下关系 $\prec$：如果存在 $k \in [n]$，使得

$0 < b_{i_k} < b_{j_k}$，则规定 $u_i \prec u_j$. 如果$(G(I), \prec)$ 是偏序集，则称 I 为 tame 理想.

命题 5　任意一个 tame 理想都是 Lyubeznik 理想.

证　假设 I 为 tame 理想. 任何一个有限偏序集都可以加细成一个全序集. 假设 $\prec$ 为如上讨论的偏序，令 $\vdash$ 为由 $\prec$ 加细而得的全序. 下面证明 I 关于 $\vdash$ 的 Lyubeznik 分解为极小自由分解. 对于 $G(I)$ 中的任一元素 u 以及 u 的任一 E-极小覆盖 C，由全序 $\vdash$ 的构造可知，u 小于 C 中其它所有元素. 因而 $C \backslash \{u\}$ 被 u 破坏，因此，C 不是完整的. 由定理 1 可知，I 是 Lyubeznik 理想.

参考文献：

[1]　EISENBUD D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry，GTM 150 [M]. New York：Springer Science，2004.

[2]　HERZOG J，HIBI T. Monomial Ideals，GTM 260 [M]. New York：Springer-Verlag，2011.

[3]　MERMIN J. Three Simplicial Resolutions [EB/OL]. [2013－06－08]. http：//arxiv. org/find/all/i/all：＋AND＋resolutions＋AND＋Three＋Simplicial/0/1/all/0/1.

[4]　ELIAHOU S，KERVAIRE M. Minimal Resolutions of Some Monomial Ideals [J]. J Algebra，1990，129：1－25.

[5]　BAYER D，PEEVA I，STURMFELS B. Monomial Resolutions [J]. Math Res Lett，1998(5)：31－46.

[6]　NOVIK I. Lyubeznik's Resolution and Rooted Complexes [J]. J Algebraic Combin，2002，16(1)：97－101.

[7]　HERZOG J，TAKAYAMA Y. Resolutions by Mapping Cones [J]. The Roos Festschrift Homology Homotopy Appl，2002，4(2)：277－294.

[8]　HORWITZ N. Linear Resolutions of Quadratic Monomial Ideals [J]. J Algebra，2007，318(2)：981－1001.

On Monomial Ideals Whose Lyubeznik Resolution Is a Minimal Free Resolution

GUO　Jin[1,2]，　WU Tong-suo[2]

1. College of Information Science and Technology，Hainan University，Haikou 570228，China；

2. Department of Mathematics，Shanghai Jiaotong University，Shanghai 200240，China

Abstract：For a monomial ideal I, let $G(I)$ be its minimal set of monomial generators. If there is a total order on $G(I)$ such that the corresponding Lyubeznik resolution of I is a minimal free resolution of I, then I is called a Lyubeznik ideal. The Lyubeznik ideals are characterized in this paper. In the mean time, some classes of Lyubeznik ideals are discussed.

Key words：Lyubeznik ideal；minimal cover；minimal free resolution

责任编辑　廖　坤