第 36 卷第 10 期　西南大学学报(自然科学版)　2014年10月
Vol. 36 No. 10　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Oct. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.017

主弱平坦系的一个推广①

乔　丽

兰州大学 数学与统计学院，兰州 730000

摘要：设 S 是幺半群，$\mathcal{T}$ 是 S 的非空集合. 通过 $\mathcal{T}$ 定义了 $\mathcal{T}$-主弱平坦系的概念，给出了这类 S-系的性质刻画. 所得结果推广了主弱平坦系的相关结论.

关 键 词：挠自由；主弱平坦；$\mathcal{T}$-主弱平坦

中图分类号：O152.7　**文献标志码**：A　**文章编号**：1673-9868(2014)10-0098-05

文献[1]给出了对于拉回图 $P(M, N, f, g, Q)$ 的相应同态 φ 的定义. 本文设 S 是幺半群，$E(S)$ 是 S 的全体幂等元构成的集合，$\mathscr{C}$ 是 S 的全体右可消元构成的集合.

定义 1　设 S 是幺半群，$\mathcal{T}$ 是 S 的非空集合. 称 S-系 A 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的，如果对于 S 的任意主左理想 St(其中 $t \in \mathcal{T}$)，映射 $A \otimes St \longrightarrow A \otimes S$ 是单的. 如果 $\mathcal{T}=\mathscr{C}$，则称 S-系 A 是 $\mathscr{C}$-主弱平坦的. 若 $\mathcal{T}=S$，则 S-系 A 是主弱平坦的.

命题 1[2]　设 A 是右 S-系，对于任意 $a, a' \in A$，$s, t \in S$，在张量积 $A \otimes S$ 中 $a \otimes s = a' \otimes t$ 当且仅当在 A 中 $as = a't$.

命题 2　右 S-系 A 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的当且仅当对于任意 $a, a' \in A$，$t \in \mathcal{T}$，若 $at = a't$，则在张量积 $A \otimes St$ 中 $a \otimes t = a' \otimes t$.

证　必要性　由 A 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的，则映射 f：$A \otimes St \longrightarrow A \otimes S$ 为包含映射，根据已知条件，对于任意 $a, a' \in A$，$t \in \mathcal{T}$，若 $at = a't$，由命题 2 可得在张量积 $A \otimes S$ 中 $a \otimes t = a' \otimes t$，所以在张量积 $A \otimes St$ 中 $a \otimes t = a' \otimes t$.

充分性　设任意 $x, y \in A$，$s, s' \in S$，$x \otimes st = y \otimes s't$ 在张量积 $A \otimes S$ 中成立，则由命题 1 可得，在 A 中 $xst = ys't$，所以在张量积 $A \otimes St$ 中 $xs \otimes t = ys' \otimes t$，故 A 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的.

当 $\mathcal{T}= S$ 时，文献[2]给出了相应的结论，即 S-系 A 是主弱平坦的当且仅当对于任意 $a, a' \in A$，$s \in S$，若 $as = a's$，则在张量积 $A \otimes Ss$ 中 $a \otimes s = a' \otimes s$.

引理 1[3]　设 A 是右 S-系，B 是左 S-系，$a, a' \in A$，$b, b' \in B$，则在 $A \otimes B$ 中 $a \otimes b = a' \otimes b'$ 的充要条件是存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$，$b_2, b_3, \cdots, b_n \in B$，$s_1, t_1, s_2, t_2, \cdots, s_n, t_n \in S$，使得

$$
\begin{array}{ll}
a = a_1 s_1 & \\
a_1 t_1 = a_2 s_2 & s_1 b = t_1 b_2 \\
a_2 t_2 = a_3 s_3 & s_2 b_2 = t_2 b_3 \\
\cdots & \\
a_n t_n = a' & s_n b_n = t_n b'
\end{array}
$$

① 收稿日期：2013-12-19
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11371178).
作者简介：乔　丽(1985-)，女，甘肃兰州人，博士研究生，主要从事半群 S-系理论的研究.

称 S-系 A 是挠自由的，如果对于任意 $a,b\in A$，任意右可消元 $c\in\mathscr{C}$，若 $ac=bc$，则 $a=b$. 于是由挠自由的定义可得到以下的结论：

定理 1 设 S 是幺半群，A 是 S-系，则以下两条结论等价：

(i) A 是 $\mathscr{C}$-主弱平坦的；

(ii) A 是挠自由的.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii) 设 A 是 $\mathscr{C}$-主弱平坦的 S-系，$a,b\in A$，$c\in\mathscr{C}$，满足 $ac=bc$. 由于 A 是 $\mathscr{C}$-主弱平坦的，则在张量积 $A\otimes Sc$ 中 $a\otimes c=b\otimes c$. 因此由引理 1 知，存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，$s_2,s_3,\cdots,s_n\in Sc$，u_1，$v_1,u_2,v_2,\cdots,u_n,v_n\in S$，使得

$$
\begin{array}{ll}
 & a=a_1u_1 \\
a_1v_1=a_2u_2 & u_1c=v_1s_2 \\
a_2v_2=a_3u_3 & u_2s_2=v_2s_3 \\
 & \cdots \\
a_nv_n=b & u_ns_n=v_nc
\end{array}
$$

设 $s_i=t_ic$，$t_i\in S$ $(i=2,3,\cdots,n)$，则由 c 的右可消性得

$$
\begin{array}{ll}
u_1=v_1t_2 & u_nt_n=v_n \\
u_it_i=v_it_{i+1} & i=2,3,\cdots,n-1
\end{array}
$$

所以

$$a=a_1u_1=a_1v_1t_2=a_2u_2t_2=a_2v_2t_3=\cdots=a_nu_nt_n=a_nv_n=b$$

即 A 是挠自由的.

(ii)$\Longrightarrow$(i) 设 $a,b\in A$，任意右可消元 $c\in\mathscr{C}$，满足 $ac=bc$，则 $a=b$. 因此在张量积 $A\otimes Sc$ 中 $a\otimes c=b\otimes c$，由命题 3 知 A 是 $\mathscr{C}$-主弱平坦的.

文献[3] 指出主弱平坦系是挠自由的，并给出例子说明挠自由系未必是主弱平坦的. 本文定义的 $\mathscr{T}$-主弱平坦 S-系是挠自由系的真推广，因为当 $\mathscr{T}=C$ 时，由定理 1 知 $\mathscr{T}$-主弱平坦系就是挠自由的，这时 $\mathscr{T}$-主弱平坦和主弱平坦不同. 当 $\mathscr{T}=S$ 时，S-系 A 是主弱平坦的，这时 $\mathscr{T}$-主弱平坦系和挠自由不同.

由文献[3] 可知，所有 S-系是主弱平坦的当且仅当 S 是正则幺半群；所有右 S-系是挠自由的当且仅当 S 的任意右可消元是右可逆元. 自然数集 $\mathbb{N}$ 按照自然数乘法构成的幺半群是非正则幺半群，并且 $\mathbb{N}$ 中的右可消元不是右可逆元，所以并非 $\mathbb{N}$ 上所有的 S-系都是挠自由的. 设 G 是群，令 $S=\mathbb{N}\dot{\cup}G$，规定 S 中的运算为：

$$ng=gn=n \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall g\in G$$

其它元素的运算按照以前的定义. 令 $\mathscr{T}=G$，则所有 S-系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的.

以下我们将给出当集合 $\mathscr{T}$ 满足一定条件时，所有挠自由的 S-系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的.

命题 3 设 S 是幺半群，λ 是 S 上的右同余，S/λ 是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的当且仅当对任意 $u,v\in S$，$t\in\mathscr{T}$，若 $ut\lambda vt$，则 $u(\lambda\vee\Delta t)v$. 其中，Δ 表示 S 上的一个等价关系，即两个元素有 Δt 关系当且仅当用 t 右乘相等.

证 必要性 设 S/λ 是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的，$u,v\in S$，$t\in\mathscr{T}$，满足 $ut\lambda vt$，则 $\overline{ut}=\overline{vt}$，所以在 $S/\lambda\otimes S$ 中 $\overline{u}\otimes t=\overline{v}\otimes t$，由 S/λ 的 $\mathscr{T}$-主弱平坦性即知，在 $S/\lambda\otimes St$ 中 $\overline{u}\otimes t=\overline{v}\otimes t$. 所以存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$
\begin{array}{ll}
 & \overline{u}=\overline{1}s_1 \\
\overline{1}t_1=\overline{1}s_2 & s_1t=t_1t \\
\overline{1}t_2=\overline{1}s_3 & s_2t=t_2t \\
 & \cdots \\
\overline{1}t_n=\overline{v} & s_nt=t_nt
\end{array}
$$

因此有

$$u\lambda s_1(\Delta t)t_1\lambda s_2\cdots\lambda s_n(\Delta t)t_n\lambda v$$

即 $u(\lambda\vee\Delta t)v$.

充分性　设 $t\in\mathcal{T}$, $\overline{u},\overline{v}\in S/\lambda$，在 $S/\lambda\otimes S$ 中有 $\overline{u}\otimes t=\overline{v}\otimes t$，则 $\overline{ut}=\overline{vt}$，所以 $ut\lambda vt$. 由条件 $u(\lambda\vee\Delta t)v$，所以存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$u\lambda s_1(\Delta t)t_1\lambda s_2\cdots\lambda s_n(\Delta t)t_n\lambda v$$

因此在 $S/\lambda\otimes St$ 中有

$$\overline{u}\otimes t=\overline{s_1}\otimes t=\overline{1}\otimes s_1t=\overline{1}\otimes t_1t=\overline{t_1}\otimes t=$$
$$\overline{s_2}\otimes t=\cdots=\overline{s_n}\otimes t=\overline{1}\otimes s_nt=\overline{1}\otimes t_nt=\overline{t_n}\otimes t=\overline{v}\otimes t$$

所以 S/λ 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的.

推论 1[4]　设 S 是幺半群，λ 是 S 上的右同余，S/λ 是主弱平坦的当且仅当对任意 $u,v,t\in S$，若 $ut\lambda vt$，则 $u(\lambda\vee\Delta t)v$.

证　令 $\mathcal{T}=S$ 即可.

命题 4　设 I 是 S 的右理想，S/I 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的当且仅当对任意 $x\in S\mathcal{T}\cap I$（其中 $S\mathcal{T}=\{st\mid s\in S, t\in\mathcal{T}\}$），必有 $x\in Ix$.

证　*必要性*　设 $x\in S\mathcal{T}\cap I$，且对任意 $y\in I$，$x\neq y$. 若 $x=yx$，则结论成立. 下设 $x\neq yx$. 在 $S/I\otimes S$ 中显然有

$$\overline{1}\otimes x=\overline{x}\otimes 1=\overline{yx}\otimes 1=\overline{y}\otimes x$$

由于 S/I 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的，所以对任意 $t\in\mathcal{T}$，在 $S/I\otimes St$ 中有 $\overline{1}\otimes x=\overline{y}\otimes x$. 则存在 $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$，使得

$$\begin{aligned}&\overline{1}=\overline{s_1}\\ &\overline{t_1}=\overline{s_2}\qquad s_1x=t_1t\\ &\overline{t_2}=\overline{s_3}\qquad s_2t=t_2t\\ &\cdots\\ &\overline{t_n}=\overline{y}\qquad s_nt=t_nx\end{aligned}$$

记 $1=t_0$，$y=s_{n+1}$，若对任意 $i\in\{0,1,\cdots,n\}$ 都有 $t_i=s_{i+1}$，则

$$x=s_1x=t_1t=s_2t=\cdots=t_nx=yx$$

矛盾. 所以存在 i，使得 $t_0=s_1$，$\cdots$，$t_{i-1}=s_i$，但 $t_i\neq s_{i+1}$，故 $t_i,s_{i+1}\in I$. 因而

$$x=s_1x=t_1t=s_2t=\cdots=t_{i-1}t=s_it=t_it$$

由于 $t_i\in I$，所以 $x\in Ix$.

充分性　设 $u,v\in S$，$t\in\mathcal{T}$，使得 $ut\lambda_I vt$. 如果 $ut=vt$，那么显然 $u\lambda_I u(\Delta t)v$，即 $u(\lambda\vee\Delta t)v$. 如果 $ut\neq vt$，则 $ut,vt\in I$，由已知条件，存在 $p,q\in I$，使得

$$ut=put\qquad vt=qvt$$

所以 $u\lambda_I u(\Delta t)pu\lambda_I qv(\Delta t)v$，即 $u(\lambda\vee\Delta t)v$，故由命题 3 可得 S/I 是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的.

推论 2[3]　设 I 是 S 的右理想，S/I 是主弱平坦的当且仅当对任意 $x\in I$，必有 $x\in Ix$.

证　令 $\mathcal{T}=S$ 即可.

引理 2[5]　设 I 是 S 的右理想，S/I 是挠自由的当且仅当对任意 $x,c\in S$，c 为右可消元；如果 $xc\in I$，则必有 $x\in I$.

定理 2　对于幺半群 S，以下几条等价：

(i) 所有挠自由的 S-系是 $\mathcal{T}$-主弱平坦的；

(ii) 所有挠自由的循环 S-系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的;

(iii) 所有挠自由的 Rees 商 S-系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的;

(iv) $\mathscr{T}$ 是左几乎正则的.

证　(i)⟹(ii)⟹(iii)　显然.

(iii)⟹(iv)　设所有挠自由的Rees商 S-系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的，任取 $s \in \mathscr{T}$，那么存在 $t, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_{m-1} \in S$，以及右可消元 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in S$，使得

$$s_1 c_1 = s r_1$$
$$s_2 c_2 = s_1 r_2$$
$$\cdots$$
$$t c_m = s_{m-1} r_m$$

令 $\mathscr{K}$ 是使得上述等式组成立的元素 t 的集合，由于 $s1 = s1$，所以 $s \in \mathscr{K}$，故 $K \neq \varnothing$.

设 I 是由集合 $\mathscr{K}$ 生成的右理想，即 $\bigcup_{t \in \mathscr{K}} tS$，下证 S/I 是挠自由的. 假设对 $s' \in S$，右可消元 $c \in S$，以及 $t \in \mathscr{K}$，使得 $s'c \in tS$. 因此存在 $r_1, \cdots, r_m, r_{m+1}, s_1, \cdots, s_{m-1} \in S$，以及右可消元 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in S$ 使得

$$s_1 c_1 = s r_1$$
$$s_2 c_2 = s_1 r_2$$
$$\cdots$$
$$t c_m = s_{m-1} r_m$$
$$s'c = t r_{m+1}$$

这说明 $s' \in \mathscr{K}$，故 $s' \in I$. 由引理2可得 S/I 是挠自由的. 又因 $s \in \mathscr{K}$，故 $s \in I$. 而 $s = 1s$，由 S/I 是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的知，存在 $t \in \mathscr{K}$，$r \in S$，使得 $trs = s$. 故 s 是左几乎正则的.

(iv)⟹(i)　设 $\mathscr{T}$ 是左几乎正则的，并且 A 是挠自由的左 S-系，若 $a, a' \in A$，$s \in \mathscr{T}$，使得 $as = a's$，因为 $\mathscr{T}$ 是左几乎正则的，则存在 $r, r_1, \cdots, r_m, s_1, \cdots, s_m \in S$，以及右可消元 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in S$，使得

$$s_1 c_1 = s r_1$$
$$s_2 c_2 = s_1 r_2$$
$$\cdots$$
$$s_m c_m = s_{m-1} r_m$$
$$s = s_m r s$$

由 $s_1 c_1 = s r_1$ 得 $a s_1 c_1 = a s r_1 = a' s r_1 = a' s_1 c_1$，由 A 是挠自由的可得 $a s_1 = a' s_1$，类似地可得 $a s_2 = a' s_2$，…，$a s_m = a' s_m$. 显然 $a s_m r = a' s_m r$，故

$$a \otimes s = a \otimes s_m r s = a s_m r \otimes s = a' s_m r \otimes s = a' \otimes s_m r s = a' \otimes s$$

在张量积 $A \otimes Ss$ 中成立，即 A 是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的.

推论3[6]　对于幺半群 S，以下几条等价:

(i) 所有挠自由的 S-系是主弱平坦的;

(ii) 所有挠自由的循环 S-系是主弱平坦的;

(iii) 所有挠自由的 Rees 商 S-系是主弱平坦的;

(iv) S 是左几乎正则的.

证　令 $\mathscr{T} = S$ 即可.

文献[6]中，$S_1 = \langle e, s, c \mid e^2 = e, es = se = ec = ce = s, sc = cs = s^2 \rangle \cup \{1\}$ 是几乎正则幺半群，设 S_2 是左PP幺半群，令 $S = S_1 \dot{\cup} S_2$，规定 S 中的运算为

$$s_1 s_2 = s_2 s_1 = s_2 \qquad \forall s_1 \in S_1, \ \forall s_2 \in S_2$$

其它元素的运算按照以前的定义. 因为左几乎正则幺半群是左 PP 幺半群，则 S 是左 PP 幺半群. 而左 PP 幺半群未必是左几乎正则幺半群，所以所有挠自由的 S -系不一定是主弱平坦的. 但令 $\mathscr{T}=S_1$，此时所有挠自由的 S -系是 $\mathscr{T}$-主弱平坦的.

参考文献：

[1] LAAN V. Pullback and Flatness Properties of Ccts I [J]. Communications in Algebra，2001，29(2)：829－850.

[2] KIP M. On Flat Acts (in Russian) [J]. Tartu Ü1 Toimetised，1970，253：66－72.

[3] 刘仲奎，乔虎生. 半群的 S -系理论 [M]. 北京：科学出版社，2008：213－216.

[4] BULMAN-FLEMING S，NORMAK P. Flatness Properties of Monocyclic Right Acts are Strong Flat I [J]. Semigroup Forum，1995，50(4)：233－241.

[5] QIAO Hu-sheng，LIU Zhong-kui. On Flatness Properties of Tortion Free Right Rees Factor ActsI [J]. Semigroup Forum，2006，73(3)：470－474.

[6] LAAN V. When Tortion Free Acts are Principally Weakly Flat I [J]. Semigroup Forum，2000，60(2)：321－325.

A Generalization of Principally Weakly Flat Acts

QIAO　Li

School of Mathematics and Statistics，Lanzhou University，Lanzhou 730000，China

Abstract：Let S be a monoid and $\mathscr{T}$ be a non-empty subset of S. In this paper we define $\mathscr{T}$-principally weakly flat acts by $\mathscr{T}$ and describe the properties of this class of S-acts. The results generalize the corresponding conclusions on principally weakly flat S-acts.

Key words：torsion-free；principally weak flatness；$\mathscr{T}$-principally weak flatness

责任编辑　廖　坤