DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.018

带两参数的四阶两点边值问题正解的存在性①

魏　梅

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：考虑两参数四阶常微分方程两点边值问题 $u^{(4)}(x)+\beta u''(x)-\alpha u(x)=f(x,u(x),u''(x))$ $(x\in[0,1])$ 在边值条件 $u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$ 下正解的存在性，其中 $f: I\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 连续. 通过构造特殊的锥，在相应线性微分方程第一特征值的相关条件下，运用锥上的不动点指数理论，获得该问题正解的存在性结果.

关　键　词：四阶两点边值问题；两参数；锥；不动点指数；正解

中图分类号：O175.8　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2014)10-00103-06

记 $I=[0,1]$，$\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$，$\mathbb{R}_-=(-\infty,0]$. 考虑带两参数的四阶常微分方程两点边值问题

$$u^{(4)}(x)+\beta u''(x)-\alpha u(x)=f(x,u(x),u''(x))\qquad x\in I \tag{1}$$

在边值条件

$$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \tag{2}$$

下正解的存在性，其中 $f: I\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 连续.

四阶边值问题是熟知的刻画弹性梁状态的数学模型，因此研究其解的存在性有重要的意义. 而在实际生活中，只有正解有意义. 近年来，有许多作者研究过其正解的存在性，并得到了一些好的结果(见文献[1-8]). 特别地，文献[1] 运用锥拉伸与压缩不动点定理研究了四阶边值问题

$$u^{(4)}(x)=f(x,u(x))\qquad x\in I$$

在边值条件(2) 下正解的存在性. 文献[2] 改进和推广了文献[1] 的结果，考虑两参数边值问题

$$u^{(4)}(x)+\beta u''(x)-\alpha u(x)=f(x,u(x))\qquad x\in I$$

在边值条件(2) 下正解的存在性. 其中参数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足

$$\beta<2\pi^2\qquad \alpha\geqslant-\frac{\beta^2}{4}\qquad \frac{\alpha}{\pi^4}+\frac{\beta}{\pi^2}<1$$

而文献[3]运用锥上的不动点指数理论研究了方程(1) 中无参数的情形. 文献[4] 推广了文献[2] 的结果，运用锥上的不动点指数理论讨论了四阶边值问题(1)-(2) 正解的存在性.

受上述思想启发，本文通过构造一个特殊的锥，运用锥上的不动点指数理论讨论非线性项含有二阶导数项的四阶边值问题(1)-(2) 在涉及第一特征值的相关条件下正解的存在性. 本文将文献[3] 的结论推广到两参数四阶微分方程边值问题，改进和优化了文献[4] 对 f 的限制条件. 本文始终假设下面两条件成立：

(H_1) $f: I\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 连续；

---

① 收稿日期：2013-11-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11261053)；甘肃省自然科学基金资助项目(1208R-JZA129).
作者简介：魏　梅(1989-)，女，甘肃庆阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

(H_2) $\alpha>0$ 或 $\beta>0$，且 $\beta<2\pi^2$，$\alpha\geqslant-\dfrac{\beta^2}{4}$，$\dfrac{\alpha}{\pi^4}+\dfrac{\beta}{\pi^2}<1$.

1 预备知识及引理

记 $C(I)$ 是赋予范数 $\|u\|=\max\limits_{x\in I}|u(x)|$ 的连续函数空间，$C^2(I)$ 和 $C^4(I)$ 分别为定义于 I 上的二阶与四阶连续可微函数空间. 设 $C^+(I)$ 是 $C(I)$ 中所有非负函数构成的锥. 本文取工作空间 $E=C^2(I)$，在 $C^2(I)$ 中取等价范数 $\|u\|_2=\|u\|+\|u''\|$. 对 $h\in C^+(I)$，我们考虑方程(1) 对应的线性方程

$$u^{(4)}(x)+\beta u''(x)-\alpha u(x)=h(x) \qquad x\in I \tag{3}$$

设 λ_1,λ_2 为多项式 $P(\lambda)=\lambda^2+\beta\lambda-\alpha$ 的两个实根，且 $\lambda_1<\lambda_2$(见文献[2，4])，由条件(H_2)知 $-\pi^2<\lambda_1<0$. 此时对每个给定的 $h\in C^+(I)$，由文献[2] 知，边值问题(3)－(2) 的唯一解 $u(x)$ 可表示为

$$u(x)=\int_0^1\int_0^1 G_1(x,y)G_2(y,z)h(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\in C^4(I) \tag{4}$$

其中 $G_i(x,y)(i=1,2)$ 为边值问题

$$\begin{cases}u''(x)+\lambda_i u(x)=0\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

的 Green 函数，满足文献[2] 的引理 2.1. 令

$$M_i=\max_{x\in I}G_i(x,x) \qquad m_i=\min_{x\in\left[\frac14,\frac34\right]}G_i(x,x) \qquad i=1,2$$

$$C_0=\int_0^1 G_1(y,y)G_2(y,y)\mathrm{d}y$$

则 $M_i,m_i,C_0>0$.

引理 1 设 $h\in C^+(I)$，则线性边值问题(3)－(2) 的唯一解 u 有如下性质：

(a) $\min\limits_{x\in\left[\frac14,\frac34\right]}u(x)\geqslant\sigma_1\|u\|$；

(b) $u''(x)\leqslant 0$，$\|u''\|\leqslant\sigma_2\|u\|$，其中

$$\sigma_1=\frac{\delta_1\delta_2C_0m_1}{C_1C_2M_1}>0 \qquad \sigma_2=\frac{C_2}{C_0\delta_1\delta_2m_1}-\lambda_1>0$$

证 由(4) 式及文献[2] 的引理 2.1(ii) 有

$$\|u\|=\max_{x\in I}|u(x)|\leqslant C_1C_2M_1\int_0^1 G_2(z,z)h(z)\mathrm{d}z$$

另一方面，由文献[2] 的引理 2.1(iii) 有

$$u(x)\geqslant\delta_1\delta_2C_0G_1(x,x)\int_0^1 G_2(z,z)h(z)\mathrm{d}z$$

从而

$$u(x)\geqslant\frac{\delta_1\delta_2C_0}{C_1C_2M_1}G_1(x,x)\|u\|$$

因此

$$\min_{x\in\left[\frac14,\frac34\right]}u(x)\geqslant\sigma_1\|u\|$$

又由于

$$\|u\|\geqslant\max_{x\in\left[\frac14,\frac34\right]}|u(x)|\geqslant\delta_1\delta_2C_0m_1\int_0^1 G_2(z,z)h(z)\mathrm{d}z \tag{5}$$

由(4) 式可得

$$-u''(x)+\lambda_1 u(x)=\int_0^1 G_2(x,z)h(z)\mathrm{d}z$$

由于 $\lambda_1<0$，故 $u''(x)\leqslant 0$. 结合(5)式有

$$\|u''\|\leqslant|\lambda_1|\ \|u\|+C_2\int_0^1 G_2(z,z)h(z)\mathrm{d}z\leqslant\left(|\lambda_1|+\frac{C_2}{\delta_1\delta_2 C_0 m_1}\right)\|u\|=\sigma_2\|u\|$$

证毕.

下面我们取 E 中的凸锥

$$K=\{u\in C^2(I)\mid u(x)\geqslant 0,\ u''\leqslant 0,\ \min_{x\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(x)\geqslant\sigma_1\|u\|,\ \|u''\|\leqslant\sigma_2\|u\|,\ \forall x\in I\}$$

并作积分算子 $A:K\longrightarrow C^2(I)$ 如下：

$$Au(x)=\int_0^1\int_0^1 G_1(x,y)G_2(y,z)f(z,u(z),u''(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

由 A 的定义及引理 1 易证 $A(K)\subset K$，且有 $A:K\longrightarrow C^2(I)$ 全连续.

按引理 1，易知边值问题(1)－(2)的解等价于 A 在 E 中的非平凡不动点. 下面我们运用锥上的不动点指数理论[3,7] 寻找 A 的非零不动点.

2　主要结论及证明

为叙述方便，我们令 $L=\pi^4-\beta\pi^2-\alpha$，则由条件($H_2$)知 $L>0$. 本文的主要结论及证明如下：

定理 1　设 f,α,β 满足条件(H_1)和(H_2)，并且下述条件成立：

(F_1) 存在 $a_1,b_1\geqslant 0$，满足 $a_1+b_1\pi^2<L$，且存在常数 $p_1>0$，使得

$$f(x,u,v)\leqslant a_1u-b_1v\qquad\forall x\in I,\ u\in[0,p_1],\ v\in[-p_1,0]$$

(F_2) 存在 $a_2,b_2\geqslant 0$，满足 $a_2+b_2\pi^2>L$，且存在 $h_1\in C^+(I)$，使得

$$f(x,u,v)\geqslant a_2u-b_2v-h_1(x)\qquad\forall x\in I,\ u\geqslant 0,\ v\leqslant 0$$

则边值问题(1)－(2)至少存在一个正解.

证　设 $0<r<R$，令

$$\Omega_1=\{u\in C^2(I)\mid\ \|u\|_2<r\}$$
$$\Omega_2=\{u\in C^2(I)\mid\ \|u\|_2<R\}$$

下证当 r 充分小，R 充分大时，A 在$(\Omega_2\setminus\overline{\Omega_1})\cap K$ 中有不动点. 取 $r\in(0,p_1]$，先证 A 在 $\partial\Omega_1\cap K$ 上满足

$$\mu Au\neq u\qquad\forall u\in\partial\Omega_1\cap K,\ 0<\mu\leqslant 1\tag{6}$$

反设(6)式不成立，即存在 $0<\mu_1\leqslant 1$ 及 $u_1\in\partial\Omega_1\cap K$，使 $\mu_1 Au_1=u_1$. 由 A 的定义，$u_1\in C^4(I)$ 满足

$$u_1^{(4)}(x)+\beta u_1''(x)-\alpha u_1(x)=\mu_1 f(x,u_1(x),u_1''(x))\qquad x\in I\tag{7}$$

及条件(2)，由于

$$0\leqslant u_1(x),\ -u_1''(x)\leqslant\|u_1\|_2=r\leqslant p_1$$

则按条件(F_1)，有

$$f(x,u_1(x),u_1''(x))\leqslant a_1u_1(x)-b_1u_1''(x)$$

方程(7)两边同乘 $\sin\pi x$，积分得

$$\int_0^1(u_1^{(4)}(x)+\beta u_1''(x)-\alpha u_1(x))\sin\pi x\mathrm{d}x=\mu_1\int_0^1 f(x,u_1(x),u_1''(x))\sin\pi x\mathrm{d}x$$

从而有

$$L\int_0^1 u_1(x)\sin\pi x\mathrm{d}x\leqslant(a_1+b_1\pi^2)\int_0^1 u_1(x)\sin\pi x\mathrm{d}x$$

由引理 1 知

$$\int_0^1 u_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} u_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\sqrt{2}\sigma_1}{\pi}\|u_1\| > 0$$

由此得 $L \leqslant (a_1 + b_1\pi^2)$，这与条件$(\mathrm{F}_1)$矛盾，因此(6)式成立. 由文献[3]的引理2知

$$i(A, \Omega_1 \cap K, K) = 1$$

另一方面，取 $e = \sin \pi x$，则 $e \in K\backslash\{\theta\}$，下证当 R 充分大时，A 在 $\partial\Omega_2 \cap K$ 上满足

$$u - Au \neq \tau e \qquad u \in \partial\Omega_2 \cap K, \tau \geqslant 0 \tag{8}$$

反设(8)式不成立，即存在 $u_2 \in \partial\Omega_2 \cap K$ 及 $\tau_0 \geqslant 0$，使 $u_2 - Au_2 = \tau_0 e$. 由 A 的定义，$Au_2 = u_2 - \tau_0 e$ 为 $h(x) = f(x, u_2(x), u_2''(x))$ 相应线性方程(3)-(2)的解，故 $u_2 \in C^4(I)$，满足条件(2)且

$$(u_2(x) - \tau_0 e)^{(4)}(x) + \beta(u_2(x) - \tau_0 e)'' - \alpha(u_2(x) - \tau_0 e) = f(x, u_2(x), u_2''(x)) \qquad x \in I \tag{9}$$

由条件(F_2)，

$$f(x, u_2(x), u_2''(x)) \geqslant a_2 u_2(x) - b_2 u_2''(x) - h_1(x)$$

方程(9)两边乘 $\sin \pi x$，积分得

$$L\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x - L\tau_0\int_0^1 \sin^2 \pi x\,\mathrm{d}x \geqslant (a_2 + b_2\pi^2)\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 h_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

则有

$$(a_2 + b_2\pi^2 - L)\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 h_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

由条件(F_2)知，$a_2 + b_2\pi^2 - L > 0$，因此

$$\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{a_2 + b_2\pi^2 - L}\int_0^1 h_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

按(9)式，$u_2(x)$ 为

$$h(x) = f(x, u_2(x), u_2''(x)) + L\tau_0 \sin \pi x$$

对应线性方程(3)的解，则由引理1，

$$\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\sqrt{2}\sigma_1}{\pi}\|u_2\|$$

因此

$$\|u_2\| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}\sigma_1}\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

故由锥 K 的定义及引理1得

$$\begin{aligned}\|u_2\|_2 = \|u_2\| + \|u_2''\| \leqslant (1+\sigma_2)\|u_2\| \leqslant \\ \frac{\pi(1+\sigma_2)}{\sqrt{2}\sigma_1}\cdot\frac{1}{a_2 + b_2\pi^2 - L}\int_0^1 h_1(x)\sin \pi x\,\mathrm{d}x \leqslant \\ \frac{\sqrt{2}(1+\sigma_2)}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{a_2 + b_2\pi^2 - L}\|h_1\| = R_1\end{aligned}$$

取 $R > \max\{R_1, p_1\}$，则在 $\partial\Omega_2 \cap K$ 上 $\|u_2\|_2 = R > R_1$，矛盾. 故(8)式成立. 由文献[3]引理3知 $i(A, \Omega_2 \cap K, K) = 0$，则按不动点指数的区域可加性有

$$i(A, (\Omega_2\backslash\overline{\Omega_1}) \cap K, K) = i(A, \Omega_2 \cap K, K) - i(A, \Omega_1 \cap K, K) = -1$$

故 A 在 $(\Omega_2\backslash\overline{\Omega_1}) \cap K$ 中有不动点，此不动点即为边值问题(1)-(2)的正解.

定理2 设 f, α, β 满足条件(H_1)和(H_2)，并且下述条件成立：

(F_1') 存在 $a_1, b_1 \geqslant 0$，满足 $a_1 + b_1\pi^2 > L$，且存在常数 $p_2 > 0$，使得

$$f(x, u, v) \geqslant a_1 u - b_1 v \qquad \forall x \in I, u \in [0, p_2], v \in [-p_2, 0]$$

(F_2') 存在 $a_2, b_2 \geqslant 0$，满足 $a_2 + b_2\pi^2 < L$，且存在 $h_2 \in C^+(I)$，使得

$$f(x, u, v) \leqslant a_2 u - b_2 v + h_2(x) \qquad \forall x \in I, u \geqslant 0, v \leqslant 0$$

则边值问题(1)－(2) 至少存在一个正解.

证　类似定理 1，取 $r \in [0, p_2]$，及 $e = \sin \pi x \in K\backslash\{\theta\}$. 先证 A 在 $\partial\Omega_1 \cap K$ 上满足

$$u - Au \neq \tau e \qquad \tau \geqslant 0, u \in \partial\Omega_1 \cap K \tag{10}$$

反设(10) 式不成立，即存在 $u_1 \in \partial\Omega_1 \cap K$ 及 $\tau_1 \geqslant 0$，使 $u_1 - Au_1 = \tau_1 e$. 由 A 的定义，$Au_1 = u_1 - \tau_1 e$ 为

$$h(x) = f(x, u_1(x), u_1''(x))$$

相应线性方程(3)－(2) 的解，故 $u_1 \in C^4(I)$ 满足

$$(u_1(x) - \tau_1 e)^{(4)}(x) + \beta(u_1(x) - \tau_1 e)'' - \alpha(u_1(x) - \tau_1 e) = f(x, u_1(x), u_1''(x)) \qquad x \in I \tag{11}$$

由于 $0 \leqslant u_1(x), -u_1''(x) \leqslant \| u_1 \|_2 = r \leqslant p_2$，则由条件$(F_1')$ 知

$$f(x, u(x), u''(x)) \geqslant a_1 u(x) - b_1 u''(x)$$

方程(11) 两边同乘 $\sin \pi x$，并在 I 上积分，得

$$L\int_0^1 u_1(x)\sin \pi x\,dx \geqslant (a_1 + b_1\pi^2)\int_0^1 u_1(x)\sin \pi x\,dx$$

由$\int_0^1 u_1(x)\sin \pi x\,dx > 0$，得 $L \geqslant a_1 + b_1\pi^2$，与条件$(F_1')$ 矛盾，故(11) 式成立，则 $i(A, \Omega_1 \cap K, K) = 0$.

下证当 R 充分大时，A 在 $\partial\Omega_2 \cap K$ 上满足

$$\mu Au \neq u \qquad \forall u \in \partial\Omega_2 \cap K, 0 < \mu \leqslant 1 \tag{12}$$

反设(12) 式不成立，即存在 $u_2 \in \partial\Omega_2 \cap K$ 及 $0 < \mu_2 \leqslant 1$，使 $\mu_2 Au_2 = u_2$. 由 A 的定义，$u_2(x)$ 满足

$$u_2^{(4)}(x) + \beta u_2''(x) - \alpha u_2(x) = \mu_2 f(x, u_2(x), u_2''(x)) \qquad x \in I \tag{13}$$

由条件(F_2') 知

$$f(x, u_2(x), u_2''(x)) \leqslant a_2 u_2(x) - b_2 u_2''(x) + h_2(x)$$

方程(13) 两边同乘 $\sin \pi x$，积分得

$$L\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,dx \leqslant (a_2 + b_2\pi^2)\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,dx + \int_0^1 h_2(x)\sin \pi x\,dx \qquad x \in I$$

从而有

$$(L - (a_2 + b_2\pi^2))\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,dx \leqslant \int_0^1 h_2(x)\sin \pi x\,dx$$

由条件(F_2') 知 $L - (a_2 + b_2\pi^2) > 0$，因此

$$\int_0^1 u_2(x)\sin \pi x\,dx \leqslant \frac{1}{L - (a_2 + b_2\pi^2)}\int_0^1 h_2(x)\sin \pi x\,dx$$

由(13) 式知，$u_2(x)$ 为 $h(x) = \mu_2 f(x, u_2(x), u_2''(x))$ 对应的线性方程(3) 的解，则按锥 K 的定义有

$$\| u_2 \|_2 = \| u_2 \| + \| u_2'' \| \leqslant (1 + \sigma_2)\| u_2 \| \leqslant$$

$$\frac{\pi(1 + \sigma_2)}{\sqrt{2}\sigma_1} \cdot \frac{1}{L - (a_2 + b_2\pi^2)}\int_0^1 h_1(x)\sin \pi x\,dx \leqslant$$

$$\frac{\sqrt{2}(1 + \sigma_2)}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{L - (a_2 + b_2\pi^2)}\| h_1 \| = R_2$$

取 $R > \max\{R_2, p_2\}$，则在 $\partial\Omega_2 \cap K$ 上，$\| u_2 \|_2 = R > R_2$，矛盾，故(13) 式成立，则 $i(A, \Omega_2 \cap K, K) = 1$，按不动点指数的区域可加性有

$$i(A, (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}) \cap K, K) = i(A, \Omega_2 \cap K, K) - i(A, \Omega_1 \cap K, K) = 1$$

故 A 在$(\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}) \cap K$ 中有不动点，此不动点即为边值问题(1)－(2) 的正解.

参考文献:

[1] MA Ru-yun, WANG Hai-yan. On the Existence of Positive Solutions of Fourth-Order Ordinary Differential Equations [J]. Appl Anal, 1995, 59(1-4): 225-231.

[2] LI Yong-xiang. Positive Solutions of Fourth-Order Boundary Value Problems with Two Parameters [J]. J Math Anal Appl, 2003, 281(2): 477-484.

[3] LI Yong-xiang. On the Existence of Positive Solutions for the Bending Elastic Beam Equations [J]. Appl Math Compu, 2007, 189(1): 821-827.

[4] 庞常词,韦忠礼. 带两个参数四阶边值问题的正解与多解性 [J]. 数学学报,2006,49(3):625-632.

[5] GUPTA C P. Existence and Results for the Bending of an Elastic Beam Equation at Resonance [J]. J Math Anal Appl, 1988, 135(1): 208-225.

[6] 高红亮,韩晓玲. 带两个参数的四阶边值问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报:自然科学版,2011,33(11):49-54.

[7] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Nolinear Problems in Abstract Cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

[8] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南:山东科学技术出版社,1985.

Existence of Positive Solutions for Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problems with Two Parameters

WEI Mei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, the existence of positive solutions for the fourth-order two-point ordinary differential equation boundary value problem with two parameters is considered: $u^{(4)}(x)+\beta u''(x)-\alpha u(x)=f(x, u(x), u''(x))$ $(x\in[0,1])$; $u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$, where $f: I\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\longrightarrow\mathbb{R}_+$ is continuous. A special cone is constructed, and the existence of positive solutions of the problem is obtained by using the fixed point index theory in cones, under the conditions on the first eigenvalue of the relevant linear differential equation.

Key words: fourth-order two-point boundary value problem; two-parameter; cone; fixed point index; positive solution

责任编辑 廖 坤