第 36 卷第 10 期 西南大学学报(自然科学版) 2014年10月
Vol. 36 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.019

非凸变分不等式的四步投影算法及其收敛性分析[①]

张 亮, 吴至友

重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331

摘要:利用非凸变分不等式和不动点问题的等价关系,给出了一个新的求解非凸变分不等式的四步投影算法. 该算法在现有的三步迭代算法基础上,利用校正方法建立了第四步迭代公式. 最后在适当条件下证明了该算法的收敛性,所得结论推广了该领域内的一些最新结果.

关 键 词: 非凸变分不等式; 一致临近正则集; ξ-强单调算子; η-Lipschitz 连续算子; 四步投影算法

中图分类号: O177.91 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2014)10-0109-05

变分不等式理论是 1964 年 Stampacchia 在文献[1]中提出的,它是非线性分析的重要组成部分. 变分不等式理论与力学、微分方程、控制理论、数学经济、最优化理论、对策理论、非线性规划等理论和应用学科有着广泛的联系并有重要的应用. 在过去的几十年中,有很多文献都致力于研究求解变分不等式的数值方法(见文献[1-12]). 近些年,Noor 在文献[2-3]中引入和研究了一类定义在非凸集合上的变分不等式,这类变分不等式为非凸变分不等式. Noor 在文献[2-3]中证明了投影方法能够推广到非凸变分不等式问题上,并且利用投影方法建立了非凸变分不等式问题与不动点问题的等价性. Noor 在文献[4]中利用这种等价性研究了非凸变分不等式解的存在性,此外还给出了求解非凸变分不等式的两步、三步迭代算法并对其收敛性进行了证明. 本文受文献[2-4]的启发,并利用校正原理提出一个新的求解非凸变分不等式的四步投影算法,最后在适当的条件下证明了该算法的收敛性.

1 预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,它的内积和范数分别记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$,设 K 是 H 中的一个非空闭凸集.

定义 1[5-6] 集合 K 在点 $u \in H$ 的近似法锥定义为

$$N_K^P(u) = \{\xi \in H : u \in P_K(u + \alpha\xi)\} \tag{1}$$

其中 $\alpha > 0$ 是常数,

$$P_K(u) = \{u^* \in K : d_K(u) = \| u - u^* \|\} \qquad d_K(u) = \inf_{v \in K} \| v - u \|$$

定义 2[6-7] 对给定的常数 $r \in (0, \infty)$,集合 $K_r \subset K$ 被称为正规一致 r-临近正则集当且仅当对 $\forall u \in K_r$ 和 $0 \neq \xi \in N_{K_r}^P(u)$,有下面的式子成立:

---

① 收稿日期: 2014-01-01
基金项目: 国家自然科学基金(10971241); 重庆市自然科学基金(cstc2013jjB00001, cstc2011jjA00010).
作者简介: 张 亮(1988-),男,四川南充人,硕士研究生,主要从事最优化理论与方法的研究.

$$\left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, v-u \right\rangle \leqslant \frac{1}{2r}\|v-u\|^2 \qquad \forall v \in K_r \tag{2}$$

考虑下面的非凸变分不等式问题：

设 $T: K_r \longrightarrow K_r$ 是给定的非线性算子，求 $u \in K_r$，使得

$$\langle Tu, v-u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in K_r \tag{3}$$

注意到，如果 $K_r = K$，则问题(3) 等价于下面的变分不等式问题：

求 $u \in K$，使得

$$\langle Tu, v-u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in K \tag{4}$$

问题(4) 就是 Stampacchia 在文献[1] 中首次提出的变分不等式问题.

众所周知，问题(3) 等价于求 $u \in K_r$，使得

$$0 \in Tu + N_{K_r}^{P}(u) \tag{5}$$

等价转化(5) 为本文使用投影法来研究问题(3) 提供了理论依据.

定义 3 算子 $g: H \longrightarrow H$ 被称为

1) ξ-强单调的当且仅当存在常数 $\xi > 0$，使得

$$\langle g(x) - g(x'), x - x' \rangle \geqslant \xi \|x - x'\|^2 \qquad \forall x, x' \in H \tag{6}$$

2) η-Lipschitz 连续的当且仅当存在常数 $\eta > 0$，使得

$$\|g(x) - g(x')\| \leqslant \eta \|x - x'\| \qquad \forall x, x' \in H \tag{7}$$

引理 1[2,5-6,8] 设 $r \in (0, \infty]$，集合 $K_r = \{u \in H: d(u, K) < r\}$. 如果 K_r 为一致 r-临近正则集，则下面的论断成立：

(i) $\forall u \in K_r$，$P_{K_r}(u) \neq \varnothing$；

(ii) $\forall r' \in (0, r)$，P_{K_r} 是 δ-Lipschitz 连续的，且 Lipschitz 常数 $\delta = \dfrac{r}{r - r'}$；

(iii) 近似法锥 $N_{K_r}^{P}(u)$ 是一个闭的集值映射.

引理 2[9] 设 $\{a_n\}$ 为非负实数列，$\{b_n\}$ 为实数列，$\{d_n\}$ 是 $(0, 1)$ 中的实数列，且满足

(i) $a_{n+1} \leqslant (1 - d_n) a_n + b_n$，$\forall n \geqslant 0$；

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = \infty$；

(iii) $\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_n}{d_n} \leqslant 0$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

则 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2 迭代算法

首先，我们建立下面的重要引理：

引理 3 $u^* \in K_r$ 是非凸变分不等式问题(3) 的解当且仅当

$$u^* = P_{K_r}[u^* - \rho T u^*] \tag{8}$$

其中 P_{K_r} 是 H 在一致 r-临近正则集 K_r 上的投影.

证 设 $u^* \in K_r$ 是问题(3) 的解，则对任意常数 $\rho > 0$，问题(3) 等价于

$$\begin{aligned} 0 \in \rho T u^* + \rho N_{K_r}^{P}(u^*) &= u^* + \rho N_{K_r}^{P}(u^*) - (u^* - \rho T u^*) = \\ &(I + \rho N_{K_r}^{P})(u^*) - (u^* - \rho T u^*) \end{aligned} \tag{9}$$

由 $P_{K_r} = (I + \rho N_{K_r}^{P})^{-1}$ 知，(9) 式等价于

$$u^* = (I + \rho N_{K_r}^{P})^{-1}[u^* - \rho T u^*] = P_{K_r}[u^* - \rho T u^*]$$

下面利用引理 3 建立求解非凸变分不等式问题(3) 的四步投影算法：

四步投影算法　任意选取初始点 $u_0 \in K_r$，采用下面的迭代格式计算序列$\{u_n\}$：

$$x_n=(1-\delta_n)u_n+\delta_n P_{K_r}[u_n-\rho T u_n] \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{10}$$

$$y_n=(1-\gamma_n)u_n+\gamma_n P_{K_r}[x_n-\rho T x_n] \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

$$z_n=(1-\beta_n)u_n+\beta_n P_{K_r}[y_n-\rho T y_n] \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

$$u_{n+1}=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_n P_{K_r}[z_n-\rho T z_n] \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

其中 P_{K_r} 是 H 在一致 r -临近正则集 K_r 上的投影，$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,\delta_n \in [0,\ 1]$ 为常数.

注 1　当 $r=\infty$ 时，四步投影算法简化为求解问题(4) 的算法. 适当地选取 $\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$ 和 δ_n，可得求解变分不等式和平衡问题的 Noor 迭代、Mann 迭代和 Ishikawa 迭代方法.

3　主要结果

定理 1　设 K 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$K_r \subset K$ 是一致 r -临近正则集. P_{K_r} 是 δ-Lipschitz 算子，且 Lipschitz 常数 $\delta=\dfrac{r}{r-r'}$. 设非线性算子 $T: K_r \times K_r \longrightarrow K_r$ 是 ξ -强单调和 η-Lipschitz 连续的. 如果存在常数 $\rho>0$，$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,\delta_n \in [0,\ 1] (n \in \mathbb{N}_+)$，使得下述条件成立：

(i) $\left|\rho-\dfrac{\xi}{\eta^2}\right|<\dfrac{\sqrt{\delta^2\xi^2-\eta^2(\delta^2-1)}}{\delta\eta^2}$，$\delta\xi>\eta\sqrt{\delta^2-1}$；

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(1-\theta_n)=\infty$.

其中

$$\theta_n=\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta(1-\delta_n(1-\theta)))))) \qquad \theta=\delta\sqrt{1-2\rho\xi+\rho^2\eta^2}$$

则问题(3) 有解，即存在 $u^* \in K_r$ 满足(3) 式. 进一步，由四步投影算法产生的迭代序列$\{u_n\}$ 收敛到 u^*.

证　由文献[4] 的定理 3.1 知，定理 1 的第一部分结论显然. 因此只需证明定理 1 后一部分结论成立即可. 设 $u^* \in K_r$ 是问题(3) 的解，则由引理 3 有

$$u^*=(1-\alpha_n)u^*+\alpha_n P_{K_r}[u^*-\rho T u^*] \tag{14}$$

$$u^*=(1-\beta_n)u^*+\beta_n P_{K_r}[u^*-\rho T u^*] \tag{15}$$

$$u^*=(1-\gamma_n)u^*+\gamma_n P_{K_r}[u^*-\rho T u^*] \tag{16}$$

$$u^*=(1-\delta_n)u^*+\delta_n P_{K_r}[u^*-\rho T u^*] \tag{17}$$

其中 $0 \leqslant \alpha_n,\beta_n,\gamma_n,\delta_n \leqslant 1$ 是常数.

由(13),(14) 式及 P_{K_r} 的 δ-Lipschitz 连续性，有

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u^*\| &= \|(1-\alpha_n)(u_n-u^*)+\alpha_n\{P_{K_r}[z_n-\rho T z_n]-P_{K_r}[u^*-\rho T u^*]\}\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\|P_{K_r}[z_n-\rho T z_n]-P_{K_r}[u^*-\rho T u^*]\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\delta\|z_n-u^*-\rho(T z_n-T u^*)\|\end{aligned} \tag{18}$$

因为 T 是 ξ -强单调和 η-Lipschitz 连续的，所以

$$\begin{aligned}&\|z_n-u^*-\rho(T z_n-T u^*)\|^2= \\ &\|z_n-u^*\|^2-2\rho\langle T z_n-T u^*,\ z_n-u^*\rangle+\rho^2\|T z_n-T u^*\|^2 \leqslant \\ &\|z_n-u^*\|^2-2\rho\xi\|z_n-u^*\|^2+\rho^2\eta^2\|z_n-u^*\|^2= \\ &(1-2\rho\xi+\rho^2\eta^2)\|z_n-u^*\|^2\end{aligned} \tag{19}$$

同理，由(12),(15) 式及 P_{K_r} 的 δ-Lipschitz 连续性，有

$$\|z_n-u^*\|=\|(1-\beta_n)(u_n-u^*)+\beta_n\{P_{K_r}[y_n-\rho T y_n]-P_{K_r}[u^*-\rho T u^*]\}\| \leqslant$$

$$(1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+\beta_n\|P_{K_r}[y_n-\rho Ty_n]-P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+\beta_n\delta\|y_n-u^*-\rho(Ty_n-Tu^*)\| \tag{20}$$

因为 T 是 ξ-强单调和 η-Lipschitz 连续的，所以

$$\|y_n-u^*-\rho(Ty_n-Tu^*)\|^2=$$
$$\|y_n-u^*\|^2-2\rho\langle Ty_n-Tu^*,\ y_n-u^*\rangle+\rho^2\|Ty_n-Tu^*\|^2\leqslant$$
$$\|y_n-u^*\|^2-2\rho\xi\|y_n-u^*\|^2+\rho^2\eta^2\|y_n-u^*\|^2=$$
$$(1-2\rho\xi+\rho^2\eta^2)\|y_n-u^*\|^2 \tag{21}$$

由(11),(16)式及 P_{K_r} 的 δ-Lipschitz 连续性，有

$$\|y_n-u^*\|=\|(1-\gamma_n)(u_n-u^*)+\gamma_n\{P_{K_r}[x_n-\rho Tx_n]-P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\}\|\leqslant$$
$$(1-\gamma_n)\|u_n-u^*\|+\gamma_n\|P_{K_r}[x_n-\rho Tx_n]-P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\|\leqslant$$
$$(1-\gamma_n)\|u_n-u^*\|+\gamma_n\delta\|x_n-u^*-\rho(Tx_n-Tu^*)\| \tag{22}$$

因为 T 是 ξ-强单调和 η-Lipschitz 连续的，所以

$$\|x_n-u^*-\rho(Tx_n-Tu^*)\|^2=$$
$$\|x_n-u^*\|^2-2\rho\langle Tx_n-Tu^*,\ x_n-u^*\rangle+\rho^2\|Tx_n-Tu^*\|^2\leqslant$$
$$\|x_n-u^*\|^2-2\rho\xi\|x_n-u^*\|^2+\rho^2\eta^2\|x_n-u^*\|^2=$$
$$(1-2\rho\xi+\rho^2\eta^2)\|x_n-u^*\|^2 \tag{23}$$

进一步，由(10),(17)式及 P_{K_r} 的 δ-Lipschitz 连续性，有

$$\|x_n-u^*\|=\|(1-\delta_n)(u_n-u^*)+\delta_n\{P_{K_r}[u_n-\rho Tu_n]-P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\}\|\leqslant$$
$$(1-\delta_n)\|u_n-u^*\|+\delta_n\|P_{K_r}[u_n-\rho Tu_n]-P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\|\leqslant$$
$$(1-\delta_n)\|u_n-u^*\|+\delta_n\delta\|x_n-u^*-\rho(Tu_n-Tu^*)\| \tag{24}$$

因为 T 是 ξ-强单调和 η-Lipschitz 连续的，所以

$$\|u_n-u^*-\rho(Tu_n-Tu^*)\|^2=$$
$$\|u_n-u^*\|^2-2\rho\langle Tu_n-Tu^*,\ u_n-u^*\rangle+\rho^2\|Tu_n-Tu^*\|^2\leqslant$$
$$\|u_n-u^*\|^2-2\rho\xi\|u_n-u^*\|^2+\rho^2\eta^2\|u_n-u^*\|^2=$$
$$(1-2\rho\xi+\rho^2\eta^2)\|u_n-u^*\|^2 \tag{25}$$

综合(18)—(25)式，可得

$$\|u_{n+1}-u^*\|\leqslant(1-\alpha_n)\|u_n-u^*\|+\alpha_n\theta(1-\beta_n)\|u_n-u^*\|+$$
$$\alpha_n\beta_n\theta^2(1-\gamma_n)\|u_n-u^*\|+$$
$$\alpha_n\beta_n\gamma_n\theta^3[1-\delta_n(1-\theta)]\|u_n-u^*\|=$$
$$\{1-\alpha_n[1-\theta(1-\beta_n(1-\theta(1-\gamma_n(1-\theta(1-\delta_n(1-\theta))))))]\}\|u_n-u^*\|=$$
$$[1-\alpha_n(1-\theta_n)]\|u_n-u^*\|$$

由(i)有 $0\leqslant\theta<1$. 所以 $\theta_n\in[0,1]$，$\alpha_n(1-\theta_n)\in[0,1]$. 从而由引理 2 知，序列$\{u_n\}$收敛到 u^*.

参考文献：

[1] STAMPACCHIA G. Formes Bilinéaires Coercitives Sur Les Ensembles Convexes [J]. CR Acad Sci Paris，1964，258：4413－4416.

[2] NOOR M A. Projection Methods for Nonconvex Variational Lnequalities [J]. Optim Lett，2009，3(3)：411－418.

[3] NOOR M A. Iterative Schemes for Nonconvex Variational Inequalities [J]. J Optim Theory Appl，2004，121(2)：385－395.

[4] NOOR M A. Some Iterative Methods for Nonconvex Variational Inequalities [J]. Comput Math Model，2010，21(1)：

97－108.

[5] CLARKE F H，LEDYAEV Y S，WOLENSKI P R. Nonsmooth Analysis and Control Theory [M]. Berlin：Springer-Verlag，1998.

[6] POLIQUIN R A，ROCKAFELLAR R T，THIBAULT L. Local Differentiability of Distance Functions [J]. Trans Amer Math Soc，2000，352(11)：5231－5249.

[7] NOOR M A. Differentiable Nonconvex Functions and General Variational Inequalities [J]. Appl Math Computation，2008，199(2)：623－630.

[8] WEN Dao-jun. Projection Methods for a Generalized System of Nonconvex Variational Inequalities with Different Nonlinear Operators [J]. Nonlinear Anal，2010，73(7)：2292－2297.

[9] XU Hong-kun. Iterative Algorithms for Nonlinear Operators [J]. J Lond Math Soc，2002，66(1)：240－256.

[10] NOOR M A. On Implicit Methods for Nonconvex Variational Inequalities [J]. J Optim Theory Appl，2010，147(2)：411－417.

[11] VERMA R U. General Convergence Analysis for Two-Step Projection Methods and Applications to Variational Problems [J]. Appl Math Lett，2005，18(14)：1286－1292.

[12] 金茂明，廖正琦. Banach 空间中一类变分包含组的 Mann 迭代算法 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(12)：12－15.

Convergence Analysis of Four-Step Projection Algorithm for Non-Convex Variational Inequalities

ZHANG Liang，　WU Zhi-you

College of Mathematics Science，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China

Abstract：It is well known that the non-convex variational inequalities are equivalent to the fixed point problems. A new four-step projective algorithm is proposed for non-convex variational inequalities based on the equivalence. With the known three-step iterative algorithms as a special case and using the technique of updating，a fourth-step iteration scheme is established. Finally，the convergence criteria of the algorithms are proved under some mild conditions. The results in this paper can be viewed as an improvement and extension of the previously known results for general variational inequalities.

Key words：non-convex variational inequality；uniform prox-regular set；ξ-strongly monotone operator；η-Lipschitz continuous operator；four-step projection algorithm

责任编辑　廖　坤