第 36 卷第 10 期 西南大学学报(自然科学版) 2014年10月
Vol. 36 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2014

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2014.10.020

非线性 Volterra-Stieltjes 型积分方程解的存在性①

杨芸碧[1,2]， 索洪敏[1]， 安育成[3]， 储昌木[1]

1. 贵州民族大学 理学院，贵阳 550025；2. 安顺学院 数学系，贵州 安顺 561000；
3. 毕节学院 理学院，贵州 毕节 551700

摘要： 根据非紧性测度以及凸幂凝聚算子的不动点定理，研究一类更具一般性的非线性 Volterra-Stieltjes 型积分方程解的存在性. 由于非线性项中含有非线性积分算子，相对于线性积分算子，所得结论推广和丰富了已有的一些结果.

关 键 词： 非紧性测度；凸幂凝聚算子；Volterra-Stieltjes 型积分；不动点

中图分类号：O177.91 **文献标志码：A** **文章编号：** 1673-9868(2014)10-0114-05

Volterra-Stieltjes 型积分方程的研究是在 20 世纪 60 年代开始的. 文献[1-4] 利用著名的 Schauder 不动点定理证明了积分算子中积分核依赖于单个变量或两个变量的 Volterra-Stieltjes 型积分方程解的存在性. 特别地，文献[5] 利用非紧性测度及其凸幂凝聚算子的不动点定理研究了 Banach 空间中非线性 Volterra 型积分方程解的存在性. 文献[6] 研究了一类非线性 Volterra-Stieltjes 型积分方程解的存在性. 受此思想的启发，本文将在实 Banach 空间$(E, \|\cdot\|)$中考虑一类更具一般性的非线性 Volterra-Stieltjes 型积分方程

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} k_1(t, s) f_1(s, x(s), (Tx)(s)) \mathrm{d} g(s) \qquad \forall t \in I \tag{1}$$

解的存在性，其中

$$(Tx)(s)=\int_{t_0}^{s} k_2(s, \nu) f_2(\nu, x(\nu)) \mathrm{d} \nu \qquad I=[t_0, t_0+a]$$

以及

$$k_i \in C[D, R] \qquad i=1,2 \qquad D=\{(t, s) \in I \times I: s \leqslant t\} \tag{2}$$

$$f_1 \in C[I \times E \times E, E] \qquad f_2 \in C[I \times E, E] \tag{3}$$

由于 T 是一个非线性积分算子，从而本文即将获得的结论从本质上推广并丰富了已有文献的一些结果. 例如，当 $g(s)=s$ 时，积分方程(1) 即是文献[7] 中研究的非线性 Volterra 型积分方程.

1 预备知识

本文总假定$(E, \|\cdot\|)$是实 Banach 空间. 不失一般性，令 $t_0=0$，$h=1$，则 $I=[0, 1]$. 定义范数 $\|x\|_c=\max\{\|x(t)\|: t \in I\}$，则$C[I, E]$按范数 $\|x\|_c$ 构成Banach空间. 并且本文均用$\alpha(\cdot)$表示 E

① 收稿日期：2013-12-02
基金项目：贵州省科技厅自然科学基金资助项目([2013]2141 号)；贵州省科技厅联合基金资助项目(LKM[2011]31 号，LKB[2012]19 号).
作者简介：杨芸碧(1979-)，女，贵州安顺人，讲师，主要从事非线性分析方面的研究.
通信作者：索洪敏，教授，博士，硕士研究生导师.

和 $C[I, E]$ 中有界集的 Kuratowski 非紧性测度. 对 $\forall r > 0$，令 $T_r = \{x \in E: \|x\| \leqslant r\}$，以及

$$K_i = \max\{|k_i(t, s)|: (t, s) \in D\} \qquad i = 1, 2$$

$$M_1(r) = \sup\{\|f_1(t, x, y)\|: (t, x, y) \in I \times T_r \times T_r\}$$

$$M_2(r) = \sup\{\|f_2(t, x)\|: (t, x) \in I \times T_r\}$$

若 $H \subset C[I, E]$，$t \in I$，令 $H(t) = \{x(t): x \in H\}$.

定义 1[8] 设 B 为 E 中的闭凸集，$A: B \longrightarrow B$. 如果 A 连续有界且存在 $x_0 \in B$ 以及正整数 n_0，使得对任何非相对紧的有界集 $S \subset B$，都有 $\alpha(A^{(n_0, x_0)}(S)) < \alpha(S)$，则称 A 是凸幂凝聚算子. 其中

$$A^{(1, x_0)}(S) = A(S) \qquad A^{(n, x_0)}(S) = A(\overline{\mathrm{co}}\{A^{(n-1, x_0)}(S), x_0\}) \qquad n = 2, 3, \cdots$$

引理 1[6] 设 H 是 $C[I, E]$ 中的有界等度连续集，g 是 I 上单调递增的连续函数，则 $\alpha(H(t)) \in C(I, \mathbb{R}_+)$，并且

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t x(s)\mathrm{d}g(s): x \in H\right\}\right) \leqslant \int_0^t \alpha(\{x(s): x \in H\})\mathrm{d}g(s) \qquad \forall t \in I$$

引理 2[7] 设 $\forall R > 0$，f_1 和 f_2 分别在 $I \times E \times E$ 和 $I \times E$ 上一致连续，且 H 是 $C[I, E]$ 中的有界等度连续集，$k_1, k_2 \in C[D, R]$，则

$$\{k_1(t, s) f_1(t, x(t), y(t)): x, y \in H\} \qquad \{k_2(t, s) f_2(t, x(t)): x \in H\}$$

分别是 $C[I \times E \times E, E]$ 和 $C[I \times E, E]$ 中的等度连续集.

引理 3[8] 设 B 为 E 中的非空有界闭凸集，$A: B \longrightarrow B$ 是凸幂凝聚算子，则 A 在 B 中有不动点.

引理 4[9] 如果 x 关于有界变差函数 ϕ 在$[a, b]$上是 Stieltjes 可积的，则

$$\left\|\int_a^b x(s)\mathrm{d}\phi(s)\right\| \leqslant \sup_{a \leqslant s \leqslant b} \|x(s)\| \bigvee_a^b \phi$$

$$\left\|\int_a^t x(x)\mathrm{d}\phi(s)\right\| \leqslant \int_a^t \|x(s)\| \mathrm{d}\left(\bigvee_a^s \phi\right) \qquad \forall t \in [a, b]$$

其中 $\bigvee_a^b \phi$ 表示 $\phi(t)$ 在$[a, b]$上的变差.

引理 5[10] 设 H 是 $C[I, E]$ 中的有界等度连续集，$x_0 \in C[I, E]$，则 $\overline{\mathrm{co}}\{H, x_0\}$ 是 $C[I, E]$ 中的有界等度连续集.

引理 6[11] 设 H 是 $C[I, E]$ 中的有界等度连续集，则

$$\alpha_H = \max_{t \in I} \alpha(H(t)) = \alpha(H(I))$$

其中 α_H 表示 $C[I, E]$ 中的非紧性测度，$H(I) = \{x(t): x \in H, t \in I\} = \bigcup_{t \in I} H(t)$.

2 主要结果

定理 1 假设下列条件成立:

(H1) $g(s)$ 是 I 上的单调递增连续函数;

(H2) 对任给实数 $r > 0$，f_1, f_2 分别在 $I \times T_r \times T_r$ 和 $I \times T_r$ 上一致连续，且满足

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{M_1(r)}{r} < 1 \tag{4}$$

(H3) 存在常数 $L_1, L_2 > 0$，使得对 E 中的任何有界集 B_1, B_2, B_3，函数 f_1, f_2 满足

$$\alpha(f_1(t, B_1, B_2)) \leqslant L_1 \alpha(B_2) \qquad \alpha(f_2(t, B_3)) \leqslant L_2 \alpha(B_3) \tag{5}$$

则积分方程(1) 在 $C[I, E]$ 中至少存在一个解.

证 定义积分算子

$$(Fx)(t) = \int_0^t k_1(t, s) f_1(s, x(s), (Tx)(s))\mathrm{d}g(s)$$

则根据函数 g 和k_i 以及 $f_i (i=1,2)$ 的性质，不难证明 $F: C[I, E] \longrightarrow C[I, E]$连续有界，且积分方程(1)

在 I 上的解等价于算子 F 的不动点. 下面将用引理 3 分 3 步完成定理的证明.

第一步：由条件(H2) 知，存在 $a\in(0,1)$ 及 $r_0>0$，使得对 $\forall r\geqslant r_0$，有 $M_1(r)<ar$，令 $r^*\geqslant r_0$ 以及 $aK_1\bigvee_0^1 g\leqslant 1$，记

$$V=\{x\in C[I,E]:\ \|x\|_c\leqslant r^*\}$$

显然，V 是 $C[I,E]$ 中的连续有界闭凸子集. 则对 $\forall x\in V$，根据(4) 式以及引理 4 可得

$$\begin{aligned}\|Fx\|_c &\leqslant K_1\int_0^t \|f_1(s,x(s),(Tx)(s))\|\,\mathrm{d}(\bigvee_0^s g)\leqslant\\ &K_1M_1(r^*)\int_0^t \mathrm{d}(\bigvee_0^s g)\leqslant\\ &aK_1r^*\bigvee_0^1 g\leqslant r^*\end{aligned}$$

因此 $Fx\in V$，故 $F:V\longrightarrow V$ 连续且有界.

第二步：证明 $F(V)\subset C[I,E]$ 为等度连续集. 事实上，根据 $k_1(t,s)$ 和 $\bigvee_0^t g$ 关于 t 在 I 上的性质及 Lebesgue 控制收敛定理知，当 $|t_2-t_1|\to 0$ 时，对 $\forall x\in V$，$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t_1)-(Fx)(t_2)\| &\leqslant\int_0^{t_1}|k_1(t_1,s)-k_1(t_2,s)|\cdot\|f_1(s,x(s),(Tx)(s))\|\,\mathrm{d}(\bigvee_0^s g)+\\ &\int_{t_1}^{t_2}|k_1(t_2,s)|\cdot\|f_1(s,x(s),(Tx)(s))\|\,\mathrm{d}(\bigvee_0^s g)\leqslant\\ &M_1(r^*)\int_0^{t_1}|k_1(t_1,s)-k_1(t_2,s)|\,\mathrm{d}(\bigvee_0^s g)+K_1M_1(r^*)(\bigvee_0^{t_2} g-\bigvee_0^{t_1} g)\leqslant\\ &ar^*\int_0^{t_1}|k_1(t_1,s)-k_1(t_2,s)|\,\mathrm{d}(\bigvee_0^s g)+aK_1r^*(\bigvee_0^{t_2} g-\bigvee_0^{t_1} g)\to 0\end{aligned}$$

故 $F(V)$ 是等度连续集.

第三步：令 $W=\overline{\mathrm{co}}\,F(V)$，则 $F:W\longrightarrow W$ 连续且有界，从而根据引理 5 知，$W\subset C[I,E]$ 为等度连续有界集. 下证 $F:W\longrightarrow W$ 是凸幂凝聚算子，即证：取 $x_0\in W$，存在正整数 n_0，使得对任何非相对紧集 $B\subset W$，有

$$\alpha(F^{(n_0,x_0)}(B))<\alpha(B)$$

对 $\forall B\subset W$，由 $F^{(n,x_0)}(B)$ 的定义及引理 5 知，$F^{(n,x_0)}(B)\subset V$ 也是等度连续有界集，故由引理 6 知

$$\alpha(F^{(n,x_0)}(B))=\max_{t\in I}\alpha(F^{(n,x_0)}(B)(t))\qquad n=1,2,\cdots\tag{6}$$

又根据引理 6、引理 2、引理 1 和(5) 式知，对 $\forall t\in I$，有

$$\begin{aligned}\alpha(F^{(1,x_0)}(B)(t)) &\leqslant K_1\int_0^t\alpha(f_1(s,B(s),(TB)(s)))\mathrm{d}g(s)\leqslant\\ &K_1L_1\int_0^t\alpha\left(\int_0^s k_2(s,\nu)f_2(\nu,B(\nu))\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}g(s)\leqslant\\ &K_1L_1\int_0^t K_2L_2\alpha(B)\ \mathrm{d}g(s)\leqslant\\ &K_1K_2L_1L_2g(t)\alpha(B)\end{aligned}\tag{7}$$

又由 $F^{(1,x_0)}(B)$ 的等度连续性和 f_i 的一致连续性，以及引理 5 和引理 2 可知

$$k_1(t,s)f_1(s,\overline{\mathrm{co}}\{(F^{(1,x_0)}(B))(s),x_0(s)\},(T\,\overline{\mathrm{co}}\{F^{(1,x_0)}(B),x_0\})(s))$$

$$k_2(s,\nu)f_2(\nu,\overline{\mathrm{co}}\{(F^{(1,x_0)}(B)),x_0(\nu)\})$$

都是等度连续的，从而根据(5) 式和(7) 式，同时注意

$$(\overline{\mathrm{co}}\,F^{(1,x_0)}(B))(t)=\overline{\mathrm{co}}((F^{(1,x_0)}(B))(t))$$

有

$$\alpha(F^{(2,x_0)}(B)(t))=\alpha\left(\int_0^t k_1(t,s)f_1(s,\overline{\mathrm{co}}\{(F^{(1,x_0)}(B))(s),x_0(s)\},C)\mathrm{d}g(s)\right)\leqslant$$
$$(K_1K_2L_1L_2)^2\alpha(B)\int_0^t g(s)\mathrm{d}g(s)\leqslant$$
$$(K_1K_2L_1L_2)^2\frac{g^2(t)}{2!}\alpha(B)$$

这里

$$C=(T\,\overline{\mathrm{co}}\{F^{(1,x_0)}(B),x_0\})(s)$$

则根据数学归纳法不难证明

$$\alpha(F^{(n,x_0)}(B)(t))\leqslant(K_1K_2L_1L_2)^n\frac{g^n(t)}{n!}\alpha(B)\leqslant(K_1K_2L_1L_2)^n\frac{g^n(1)}{n!}\alpha(B) \tag{8}$$

于是根据(6)式和(8)式知

$$\alpha(F^{(n,x_0)}(B))=\max_{t\in I}\alpha(F^{(n,x_0)}(B)(t))\leqslant(K_1K_2L_1L_2)^n\frac{g^n(1)}{n!}\alpha(B)$$

由于当 $n\to\infty$ 时，$(K_1K_2L_1L_2)^n\dfrac{g^n(1)}{n!}\to 0$. 故存在正整数 n_0，使得 $\alpha(F^{(n_0,x_0)}(B))<\alpha(B)$，这就证明了 $F:W\longrightarrow W$ 是一个凸幂凝聚算子.

综上所述，根据引理3，F 在 W 中存在不动点 x^*，即 x^* 是积分方程(1)在 $C[I,E]$ 中的解，证毕.

注1 事实上，如果假设 $h\in C[I,E]$ 以及其它条件不变的情况下，则对于非线性积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_{t_0}^t k_1(t,s)f_1\left(s,x(s),\int_{t_0}^s k_2(s,\nu)f_2(\nu,x(\nu))\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}g(s)\qquad\forall t\in I$$

也有同样的结果，其证明过程也完全类似.

注2 读者可以进一步考虑如下积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_{t_0}^t k_1(t,s)f_1\left(s,x(s),\int_{t_0}^s k_2(s,\nu)f_2(\nu,x(\nu))\mathrm{d}\beta(\nu)\right)\mathrm{d}\gamma(s)\qquad\forall t\in I$$

解的存在性，即非线性项中同时含有非线性 Volterra-Stieltjes 型积分算子. 此外，读者也可考虑 Volterra-Stieltjes 型积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_{t_0}^t G(t,s)f(s,x(s),Tx(s),Sx(s))\mathrm{d}g(s)\qquad\forall t\in I$$

解的存在性，这里算子 T 和 S 的定义见文献[12].

参考文献:

[1] MINGARELLI A B. Volterra-Stieltjes Integral Equations and Generalized Ordinary Differential Expressions [M]. Berlin: Spring, 1983.

[2] VAZ P T, DEO S G. On a Volterra-Stieltjes Integral Equation [J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1990, 3(3): 177－192.

[3] BANAS J, DRONKA J. Integral Operators of Volterra-Stieltjes Type, Their Properties and Applications [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2000, 32(11): 1321－1331.

[4] BANAS J, CABALLERO M J. Some Properties of Nonlinear Volterra-Stieltjes Integral Operators [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2005, 49(10): 1565－1753.

[5] 史红波，闫超栋. Banach空间中非线性Volterra型积分方程解的存在性 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(3): 36－39.

[6] 索洪敏，唐春雷. 一类非线性Volterra-Stieltjes型积分方程解的存在性 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(4): 4－8.

[7] 袁邢华，蒋巧云. Banach空间中的一类非线性Volterra型积分方程整体解的存在性 [J]. 应用泛函分析学报, 2010,

12(1)：60－64.

[8] 孙经先，张晓燕. 凸幂凝聚算子的不动点定理及其对抽象半线性发展方程的应用 [J]. 数学学报，2005，48(3)：439－446.

[9] 王拉省，薛　红，聂赞坎. 向量值函数的 Riemann-Stieltjes 积分 [J]. 数学的实践与认识，2005，37(7)：129－137.

[10] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1989.

[11] GUO Da-jun，LIU Xin-zhi，LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Integral Equations in Abstract Space [M]. Dordrecht：Kluwer Academic，1996.

[12] LIU Li-shan，GUO Fei，WU Cong-xin，et al. Existence Theorems of Global Solutions for Nonlinear Volterra Type Integral Equations in Banach Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2005，309(2)：638－649.

Existence of Solutions for Nonlinear Volterra-Stieltjes Type Integral Equations

YANG Yun-bi[1,2]，　SUO Hong-min[1]，
AN Yu-cheng[3]，　CHU Chang-mu[1]

1. Schoool of Sciences，Guizhou Minzu University，Guiyang 550025，China；
2. Department of Mathematics，Anshun University，Anshun Guizhou 561000，China；
3. Schoool of Sciences，Bijie University，Bijie Guizhou 551700，China

Abstract：In this paper，we apply the measure of noncompactness and convex-power condensing operator to investigate a class of nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and obtain the existence of solutions for this integral equation. Because there is a nonlinear integral operator in nonlinear term，compared with linear integral operator，some results in known papers are expanded and enriched.

Key words：measure of noncompactness；convex-power condensing operator；volterra-Stieltjes type integral equation；fixed point

责任编辑　廖　坤