第 37 卷第 1 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2015 年 1 月
Vol. 37　No. 1　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jan.　2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.01.012

更一般的常系数线性差分微分方程的解①

贾秀梅[1]，　李永军[2]，　杨继超[1]

1. 河西学院 数学与统计学院，甘肃 张掖 734000；2. 兰州城市学院 数学学院，兰州 730070

摘要： 利用 Mikusinski 算符演算，微分算符的有关公式、性质和结果，移动算符级数的概念和结论，给出更一般的常系数线性差分微分方程在 $n=3$ 时的级数解. 所得结果推广了已有结论.

关　键　词： 算符；差分微分方程；微分算符；级数解

中图分类号：O241.8　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2015)01-0079-05

Mikusinski 算符演算理论可求解常系数线性微分方程、差分方程的解[1]. 其实对一般的常系数线性差分方程，微分方程和差分微分方程的求解方法都是先将方程转化为对应的算符方程，然后对算符方程求出算符解，再将算符解转化为一般方程的函数解. 本文将利用 Mikusinski 的算符演算理论中的解析函数与某类移动算符级数一一对应的思想方法和解析函数的性质来解决一般的低阶常系数线性差分微分方程的求解问题. 下面先简单介绍一下 Mikusinski 的算符概念及本文要引用的一些结论.

设 C 是定义在 $-\infty<t<\infty$ 上且在某点左方几乎处处为零的复值连续函数 $f=\{f(t)\}$ 的全体，以通常的加法和数乘及其卷积

$$f\cdot g=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$$

作为乘法运算，由 Titchmarsh 定理[2] 可知 C 为一无零因子的整环，从而可扩充为商域，即 Mikusinski 算符域 Q[3]. 对每个 $x\in Q$，都有“分式”(算符)

$$x=\frac{a}{b}\qquad a,b\in C,\ b\neq 0$$

特别地，在自然嵌入意义下，函数类 C 和直线 $-\infty<t<\infty$ 上定义的且在某点左方几乎处处为零的局部可积函数 $f=\{f(t)\}$ 的全体 L 均含于 Q 中. 此外，Q 中还包含有积分算符 $l=\{g(t)\}$，微分算符 $s=\dfrac{1}{l}$，移动算符 $h^{\lambda}=s\{H_{\lambda}(t)\}(\lambda>0)$ 等，这里

$$g(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geqslant 0\end{cases}$$

$$H_{\lambda}(t)=\begin{cases}0 & t<\lambda\\ 1 & t\geqslant\lambda\end{cases}$$

① 收稿日期：2013-12-20
基金项目：国家自然科学基金(11261027)；河西学院青年科研基金(qn201014).
作者简介：贾秀梅(1977-)，女，甘肃古浪人，副教授，主要从事微分和差分方程研究.

并且对每个 $\lambda>0$，$f(t)=\{f(t)\}\in C$，有如下结论[3]：

(a) $h^{\lambda}\{f(t)\}=\{f(t-\lambda)\}$；

(b) $h^{-\lambda}\{f(t)\}=\{f(t+\lambda)\}$；

(c) $sx-x(0)=\{x'(t)\}$($x=\{x(t)\}$ 在零点左方恒为零且可微). 移动算符幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n f^n h^{n\lambda}$ 恒为收敛算符，其中 $\lambda>0$，$a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为复数，$f=\{f(t)\}\in L$，则对于每个常数 β 和自然数 k

$$\frac{1}{1-\beta f h^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n f^n h^{n\lambda}$$

$$\frac{1}{(1-\beta f h^{\lambda})^{1+k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\beta^n f^n h^{n\lambda}$$

(d) 对 $f=\{f(t)\}$，$g=\{g(t)\}\in L$，α,β 为非零常数，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n f^n h^{n\lambda}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n g^n h^{n\lambda}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j f^j\beta^{n-j}g^{n-j}\right)h^{n\lambda}$$

更一般的常系数线性差分微分方程

$$\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}y^{(i)}(t+j\lambda)=f(t)\qquad 0\leqslant t<\infty \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$ 均为常数，$\lambda>0$，$f=\{f(t)\}\in L$，L 为 $0\leqslant t<\infty$ 上的局部绝对可积函数全体.

常见方程(1) 的特殊情形参见文献[4－7].

下面讨论方程(1) 在条件

$$y^{(i)}(j\lambda)=y_{ij}\qquad i=0,1,\cdots,n-1\qquad j=0,1,\cdots,n \tag{2}$$

下的求解问题，其中：$\lambda>0$；$a_0,a_1,\cdots,a_n,y_{ij}(i=0,1,\cdots,j-1;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是常数，$a_0a_n\neq 0$；$f=\{f(t)\}$ 为 $n\leqslant t<\infty$ 上的局部绝对可积函数.

不失方程(1) 的一般性，可以假设方程(1) 中的任何一个系数 a_{ij} 为 1，设 $a_{00}=1$ 或 $a_{nn}=1$ 都可以. 方程(1) 中 $n=1$ 和 $n=2$ 的情形已经在文献[8] 中研究过，本文研究 $n=3$ 的情形.

定理 对于方程

$$\sum_{i,j=0}^{3}a_{ij}y^{(i)}(t+j\lambda)=f(t)\qquad 0\leqslant t<\infty \tag{3}$$

如果

$$y^{(i)}(j\lambda)=y_{ij}\qquad i=0,1,2\qquad j=0,1,2,3 \tag{4}$$

和

$$a_{ij}=a_{i3}a_{3j}\qquad i,j=0,1,2,3 \tag{5}$$

成立，则方程(3) 的级数形式解为：

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}r_1^j r_2^{m-j}r_3^{n-m}\right)\right)F(t-(n+3)\lambda)$$

其中 $a_{33}=1$，$a_{ij}(i,j=0,1,2,3$ 且 i,j 不同时为 3)，$y_{ij}(i=0,1,2;\ j=0,1,2,3)$ 均为常数，$f=\{f(t)\}\in L$.

证 由于

$$y^{(i)}=s^i y-s^{i-1}y(0)-\cdots-sy^{(i-2)}(0)-y^{(i-1)}(0)$$

可得

$$\{y^{(i)}(t+j\lambda)\}=s^i\{y(t+j\lambda)\}-s^{i-1}\{y(j\lambda)\}-\cdots-sy^{(i-2)}(j\lambda)-y^{(i-1)}(j\lambda)$$

$$i=1,2,3 \qquad j=0,1,2,3 \tag{6}$$

由(b)知：

$$\{y(t+j\lambda)\}=h^{-j\lambda}y \qquad j=0,1,2,3 \tag{7}$$

则由(6),(7)式得

$$\{y^{(i)}(t+j\lambda)\}=s^{i}h^{-j\lambda}y-s^{i-1}\{y(j\lambda)\}-\cdots-sy^{(i-2)}(j\lambda)-y^{(i-1)}(j\lambda)$$
$$i=1,2,3 \qquad j=0,1,2,3 \tag{8}$$

再根据条件(4),(5),(8)式，方程(3)转化为算符方程

$$\begin{aligned}&(s^3h^{-3\lambda}+a_{31}s^3h^{-\lambda}+a_{30}s^3+a_{32}s^3h^{-2\lambda}+a_{03}h^{-3\lambda}+a_{13}sh^{-3\lambda}+\\&a_{23}s^2h^{-3\lambda}+a_{22}s^2h^{-2\lambda}+a_{21}s^2h^{-\lambda}+a_{20}s^2+a_{12}sh^{-2\lambda}+\\&a_{02}h^{-2\lambda}+a_{11}sh^{-\lambda}+a_{10}s+a_{01}h^{-\lambda}+a_{00})y=\\&(y_{03}+a_{31}y_{01}+a_{30}y_{00}+a_{32}y_{02})s^2+(y_{13}+a_{31}y_{11}+\\&a_{30}y_{10}+a_{32}y_{12}+a_{23}y_{03}+a_{22}y_{02}+a_{21}y_{01}+a_{20}y_{00})s+\\&(y_{23}+a_{31}y_{21}+a_{30}y_{20}+a_{32}y_{22}+a_{13}y_{03}+a_{23}y_{13}+a_{22}y_{12}+\\&a_{21}y_{11}+a_{20}y_{10}+a_{12}y_{02}+a_{11}y_{01}+a_{10}y_{00})+f\end{aligned} \tag{9}$$

若令

$$\begin{aligned}\alpha&=y_{03}+a_{31}y_{01}+a_{30}y_{00}+a_{32}y_{02}\\\beta&=y_{13}+a_{31}y_{11}+a_{30}y_{10}+a_{32}y_{12}+a_{23}y_{03}+a_{22}y_{02}+a_{21}y_{01}+a_{20}y_{00}\\\eta&=y_{23}+a_{31}y_{21}+a_{30}y_{20}+a_{32}y_{22}+a_{13}y_{03}+a_{23}y_{13}+a_{22}y_{12}+a_{21}y_{11}+\\&\quad a_{20}y_{10}+a_{12}y_{02}+a_{11}y_{01}+a_{10}y_{00}\\\varphi&=s^3h^{-3\lambda}+a_{31}s^3h^{-\lambda}+a_{30}s^3+a_{32}s^3h^{-2\lambda}+a_{03}h^{-3\lambda}+a_{13}sh^{-3\lambda}+a_{23}s^2h^{-3\lambda}+\\&\quad a_{22}s^2h^{-2\lambda}+a_{21}s^2h^{-\lambda}+a_{20}s^2+a_{12}sh^{-2\lambda}+a_{02}h^{-2\lambda}+a_{11}sh^{-\lambda}+a_{10}s+\\&\quad a_{01}h^{-\lambda}+a_{00}\end{aligned}$$

则 α,β,η 为常数，且式(9)变形为

$$y=\frac{\alpha s^2+\beta s+\eta+f}{\varphi} \tag{10}$$

下面令 r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6 满足

$$\begin{cases}r_1r_2r_3=-a_{30}\\r_4r_5r_6=-a_{03}\\r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=a_{31}\\r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6=a_{13}\\r_1+r_2+r_3=-a_{32}\\r_4+r_5+r_6=-a_{23}\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}a_{30}&=-r_1r_2r_3\\a_{31}&=r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3\\a_{03}&=-r_4r_5r_6\\a_{13}&=r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6\\a_{23}&=-(r_4+r_5+r_6)\end{aligned}$$

$$a_{20}=r_1r_2r_3(r_4+r_5+r_6)$$
$$a_{32}=-(r_1+r_2+r_3)$$
$$a_{02}=(r_1+r_2+r_3)r_4r_5r_6$$
$$a_{10}=-r_1r_2r_3(r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)$$
$$a_{01}=-r_4r_5r_6(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)$$
$$a_{00}=r_1r_2r_3r_4r_5r_6$$
$$a_{22}=-(r_1+r_2+r_3)(r_4+r_5+r_6)$$
$$a_{11}=(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)(r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)$$
$$a_{21}=-(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)(r_4+r_5+r_6)$$
$$a_{12}=-(r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)(r_1+r_2+r_3)$$

这样就有

$$\begin{gathered}\varphi=s^3h^{-3\lambda}+a_{31}s^3h^{-\lambda}+a_{30}s^3+a_{32}s^3h^{-2\lambda}+a_{03}h^{-3\lambda}+a_{13}sh^{-3\lambda}+a_{23}s^2h^{-3\lambda}+\\ a_{22}s^2h^{-2\lambda}+a_{21}s^2h^{-\lambda}+a_{20}s^2+a_{12}sh^{-2\lambda}+a_{02}h^{-2\lambda}+a_{11}sh^{-\lambda}+a_{10}s+\\ a_{01}h^{-\lambda}+a_{00}=\\ s^3h^{-3\lambda}+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)s^3h^{-\lambda}-r_1r_2r_3s^3-(r_1+r_2+r_3)s^3h^{-2\lambda}-r_4r_5r_6h^{-3\lambda}+\\ (r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)sh^{-3\lambda}-(r_4+r_5+r_6)s^2h^{-3\lambda}-(r_1+r_2+r_3)(r_4+r_5+r_6)s^2h^{-2\lambda}-\\ (r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)(r_4+r_5+r_6)s^2h^{-\lambda}+r_1r_2r_3(r_4+r_5+r_6)s^2-\\ (r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)(r_1+r_2+r_3)sh^{-2\lambda}+(r_1+r_2+r_3)r_4r_5r_6h^{-2\lambda}+\\ (r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)(r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)sh^{-\lambda}-r_1r_2r_3(r_4r_5+r_5r_6+r_4r_6)s-\\ (r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)r_4r_5r_6h^{-\lambda}+r_1r_2r_3r_4r_5r_6=\\ (h^{-\lambda}-r_1)(h^{-\lambda}-r_2)(h^{-\lambda}-r_3)(s-r_4)(s-r_5)(s-r_6)\end{gathered}$$

故式(10)为

$$\begin{gathered}y=\frac{\alpha s^2+\beta s+\eta+f}{(h^{-\lambda}-r_1)(h^{-\lambda}-r_2)(h^{-\lambda}-r_3)(s-r_4)(s-r_5)(s-r_6)}=\\ \frac{1}{(1-h^{\lambda}r_1)(1-h^{\lambda}r_2)(1-h^{\lambda}r_3)(s-r_4)(s-r_5)(s-r_6)}h^{3\lambda}(\alpha s^2+\beta s+\eta+f)=\\ (\sum_{n=0}^{\infty}r_1^nh^{n\lambda})(\sum_{n=0}^{\infty}r_2^nh^{n\lambda})(\sum_{n=0}^{\infty}r_3^nh^{n\lambda})\{\mathrm{e}^{r_4t}\}\{\mathrm{e}^{r_5t}\}\{\mathrm{e}^{r_6t}\}(\alpha s^2+\beta s+\eta+f)=\\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{n}(\sum_{j=0}^{m}r_1^jr_2^{m-j}r_3^{n-m}))h^{(n+3)\lambda}\{\mathrm{e}^{r_4t}\}\{\mathrm{e}^{r_5t}\}\{\mathrm{e}^{r_6t}\}(\alpha s^2+\beta s+\eta+f)\end{gathered}$$

令

$$F=\{F(t)\}=(\alpha s^2+\beta s+\eta)\{\mathrm{e}^{r_4t}\}\{\mathrm{e}^{r_5t}\}\{\mathrm{e}^{r_6t}\}+\{\mathrm{e}^{r_4t}\}\{\mathrm{e}^{r_5t}\}\{\int_0^t f(t-\xi)\mathrm{e}^{r_6\xi}\mathrm{d}\xi\}$$

则 $F\in C\subset L$，由此得到方程(3)适合条件(4)和(5)的解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{n}(\sum_{j=0}^{m}r_1^jr_2^{m-j}r_3^{n-m}))h^{(n+3)\lambda}F$$

即

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{m=0}^{n}(\sum_{j=0}^{m}r_1^jr_2^{m-j}r_3^{n-m}))F(t-(n+3)\lambda)$$

方程(3)的求解很复杂，且 n 越大求解越复杂. 能否在解高阶方程(1)时有更简便的方法，可做进一步研究. 同时，这个研究也将对变系数情形的方程(1)的求解有帮助.

参考文献：

[1] 周之虎. 算符演算理论与应用 [M]. 合肥：合肥工业大学出版社，2003：310－326.

[2] MIKUSINSKI J. Operational Calculus [M]. New York：Pergamon Press，1959：45－65.

[3] MIKUSINSKI J. Operational Calculus [M]. 5 版. 王建午，译. 上海：上海科技出版社，1964：84－95.

[4] 周之虎. n 阶变系数线性差分微分方程的解 [J]. 大学数学，2006，22(6)：74－77.

[5] 周之虎. n 阶变系数线性差分方程的解 [J]. 应用数学和力学，1994，15(3)：221－232.

[6] 周之虎. n 阶常系数线性差分方程的 Mikusinski 算符解法 [J]. 安徽建筑工业学院学报，1995，5(3－4)：69－73.

[7] 周之虎. 一类常系数线性差分微分方程的 Mikusinski 算符解 [J]. 安徽建筑工业学院学报，1993，3(1)：51－57.

[8] 周之虎. 更一般的常系数线性差分微分方程的解 [J]. 大学数学，2005，21(6)：61－65.

The Solution of More General Linear Difference Differential Equations with Constant Coefficients

JIA Xiu-mei[1]，　LI Yong-jun[2]，　YANG Ji-chao[1]

1. *School of Mathematics and Statistics*，*Hexi University*，*Zhangye Gansu 734000*，*China*；

2. *School of Mathematics*，*Lanzhou City University*，*Lanzhou 730070*，*China*

Abstract：Using J. Mikusinski's operational calculus，the related formulae，properties and results of differential operators，and the concept and conclusions of series of shifting operators，this paper gives the series solution of more general linear difference-differential equations with constant coefficients when $n=3$. The result obtained extends the conclusions in [1].

Key words：operator；difference differential equation；differential operator；series solution

责任编辑　张　栒