第 37 卷第 1 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2015 年 1 月
Vol. 37 No. 1　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jan. 2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.01.014

一类级联系统的边界控制①

赵　娜，　谢成康，　司元超

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究的是中间纽曼条件级联的反应扩散方程的边界控制问题. 由于中间纽曼条件级联问题的特殊性，需要更新原有的 Backstepping 方法，得到新的 Backstepping 变换，根据相应条件得到核方程并对其求解，进而得到变换和控制律. 通过逆变换及其有界性证明了闭环系统的指数稳定性.

关　键　词：级联系统；边界控制；稳定性

中图分类号：O231.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)01-0093-06

在工程控制过程当中，以常微分方程系统来刻画控制模型的情况很常见. 在过去几十年，偏微分方程中的反应扩散方程边界控制被广为研究[1]. 由于反应扩散方程与常微分方程耦合和级联的问题有丰富的物理背景，成为这几年热门的研究课题之一. 其中反应扩散方程与常微分方程的耦合问题有很多研究成果[2-3]. 反应扩散方程与常微分方程级联问题也有很多研究成果[4-5].

本文研究如下控制系统：

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}u_x(x_0,t),\ x_0\in(0,1),\ t>0\\&u_t(x,t)=u_{xx}(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0\\&u(0,t)=0,\ u(1,t)=U(t),\ t>0\end{aligned}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{I}_n$，$a\in\mathbb{R}^1$；向量 $\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^n$ 是常微分方程的状态；$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 是可控制矩阵对；标量 $u(x,t)\in\mathbb{R}$ 是反应扩散方程的状态；$U(t)$ 是边界控制输入. 控制设计的目标是让整个闭环系统的状态量 $(\boldsymbol{X}(t),u(x,t))$ 在某种范数意义下指数稳定.

由于级联点在中间位置，即 $x_0\in(0,1)$，以往研究中所使用的变换不再适用，于是就要改进原有的变换. 改进的变换包含 4 个核函数，所以在计算核函数的过程中，需要更多的技巧. 为建立闭环系统稳定性，证明了逆变换的存在性，由此证明了闭环系统在控制律下是指数稳定的.

1　控制律设计

本文通过 Backstepping 方法来建立控制律 $U(t)$.

1.1　Backstepping 变换和控制律

引入改进的 Backstepping 变换 $(\boldsymbol{X}(t),u(x,t))\longrightarrow(\boldsymbol{X}(t),w(x,t))$：

---

① 收稿日期：2014-01-03

基金项目：国家自然科学基金(11301427).

作者简介：赵　娜(1989-)，女，山西阳泉人，硕士研究生，主要从事偏微分方程系统控制的研究.

通信作者：谢成康，教授.

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t) \\ w(x,t)=u(x,t)-p(x)\int_0^{x_0} q(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\Phi(x)\boldsymbol{X}(t) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $p(x)$,$q(y)$,$k(x,y)$ 和 $\Phi(x)$ 为待定的核函数.

选取目标系统:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}w_x(x_0,t),\ x_0\in(0,1),\ t>0 \\ &w_t(x,t)=w_{xx}(x,t),\ t>0 \\ &w(0,t)=0,\ w(1,t)=0,\ t>0 \end{aligned} \tag{3}$$

其中选取向量 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 使得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$为 Herwitz 矩阵.

得到控制律:

$$U(t)=p(1)\int_0^{x_0} q(y)u(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 k(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\Phi(1)\boldsymbol{X}(t) \tag{4}$$

选取核函数 $p(x)$,$q(y)$,$k(x,y)$ 和 $\Phi(x)$,使得变换(2)把系统(1)化为系统(3). 为了得到核函数满足的条件,由式(2)得到

$$\begin{aligned} w_{xx}(x,t)=u_{xx}(x,t)-p''(x)\int_0^{x_0} q(y)\mathrm{d}y-(k'(x,x)+k_x(x,x))u(x,t)- \\ k(x,x)u_x(x,t)-\Phi''(x)\boldsymbol{X}(t)-\int_0^x k_{xx}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} w_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-(p(x)q(x_0)+\Phi(x)\boldsymbol{B})u_x(x_0)+(p(x)q(0)+k(x,0))u_x(0)- \\ p(x)\int_0^{x_0} q''(y)u(y,t)\mathrm{d}y+p(x)q'(x_0)u(x_0)-k(x,x)u_x(x,t)+k_y(x,x)u(x,t)- \\ \int_0^x k_{yy}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\Phi(x)\boldsymbol{AX}(t) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} w_t(x,t)-w_{xx}(x,t)=-(p(x)q(x_0)+\Phi(x)\boldsymbol{B})u_x(x_0,t)+(p(x)q(0)+ \\ k(x,0))u_x(0,t)+p(x)q'(x_0)u(x_0,t)+2k'(x,x)u(x,t)+ \\ \int_0^{x_0}(p''(x)q(y)-p(x)q''(y))u(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^x(k_{xx}(x,y)- \\ k_{yy}(x,y))u(y,t)\mathrm{d}y+(\Phi''(x)-\Phi(x)\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(t) \end{aligned}$$

其中

$$k'(x,x)=\left.\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\right|_{y=x}+\left.\frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\right|_{y=x}$$

为了使 $w(x,t)$ 满足目标系统(3),令 $p(x)$,$q(y)$,$k(x,y)$ 和 $\Phi(x)$ 满足

$$k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)=0,\ k'(x,x)=0,\ k(x,0)=-p(x)q(0)$$

$$p''(x)q(y)-p(x)q''(y)=0,\ q'(x_0)=0,\ \Phi''(x)-\Phi(x)\boldsymbol{A}=0,\ p(x)q(x_0)+\Phi(x)\boldsymbol{B}=0$$

通过令 $p(0)=0$,$\Phi(0)=0$,得到

$$p(0)\int_0^{x_0} q(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\Phi(0)\boldsymbol{X}(t)=0$$

即边界条件 $w(0,t)=u(0,t)$ 得到满足. 另外,$w_x(x_0,t)$ 和 $u_x(x_0,t)$ 还需要满足

$$\boldsymbol{AX}(t)+\boldsymbol{B}\,u_x(x_0,t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}\,w_x(x_0,t)$$

$$w_x(x_0,t)=u_x(x_0,t)-p'(x_0)\int_0^{x_0} q(y)u(y)\mathrm{d}y-k(x_0,x_0)-\int_0^{x_0} k_x(x_0,y)u(y)\mathrm{d}y-\Phi'(x_0)\boldsymbol{X}(t)$$

因而

$$\int_0^{x_0}(p'(x_0)+k_x(x_0,y))u(y,t)\mathrm{d}y+k(x_0,x_0)u(x_0,t)+$$

$$\int_0^{x_0} k_x(x_0, y)u(y, t)\mathrm{d}y + \Phi'(x_0)\boldsymbol{X}(t) = 0$$

此外，令

$$k(x_0, x_0) = 0,\ \Phi(x_0) = \boldsymbol{K},\ p'(x_0)q(y) + k_x(x_0, y) = 0$$

由于 $k'(x, x) = 0$ 和 $k(x_0, x_0) = 0$，所以得 $k(x, x) = 0$.

至此，得到了 $p(x)$,$q(y)$,$k(x, y)$ 和 $\Phi(x)$ 需要满足的方程. 接下来需要给出方程的解.

1.2　核方程的解

将关于 $k(x, y)$,$p(x)$,$q(y)$,$\Phi(x)$ 所需要满足的方程和条件归纳如下：

$$\begin{cases} k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) = 0,\ k(x, x) = 0,\ k(x, 0) = -p(x)q(0) \\ p''(x)q(y) - p(x)q''(y) = 0,\ q'(x_0) = 0,\ p(0) = 0 \\ \Phi''(x) - \Phi(x)\boldsymbol{A} = 0,\ \Phi(0) = 0,\ \Phi'(x_0) = \boldsymbol{K} \\ p(x)q(x_0) + \Phi(x)\boldsymbol{B} = 0,\ p'(x_0)q(y) + k_x(x_0, y) = 0 \end{cases}$$

为求解核方程，将方程(7) 拆成 3 个方程

$$k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) = 0,\ k(x, x) = 0,\ k(x, 0) = -p(x)q(0) \tag{7}$$

$$p''(x)q(y) - p(x)q''(y) = 0,\ q'(x_0) = 0,\ p(0) = 0 \tag{8}$$

$$\Phi''(x) - \Phi(x)\boldsymbol{A} = 0,\ \Phi(0) = 0,\ \Phi'(x_0) = \boldsymbol{K} \tag{9}$$

以及两个兼容条件

$$p(x)q(x_0) + \Phi(x)\boldsymbol{B} = 0 \tag{10}$$

$$p'(x_0)q(y) + k_x(x_0, y) = 0 \tag{11}$$

分别求解关于 $p(x)$,$q(y)$,$k(x, y)$ 和 $\Phi(x)$ 的方程，再通过选取适当的参数使兼容条件(10),(11) 得到满足.

由(8) 式，并令

$$\frac{p''(x)}{p(x)} = \frac{q''(y)}{q(y)} = \gamma \tag{12}$$

其中 $\gamma = \lambda^2 > 0$ 是一个待定常数. 方程(8) 的解为

$$p(x) = \xi(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \qquad q(y) = \eta(\mathrm{e}^{\lambda y} - \mathrm{e}^{\lambda(2x_0 - y)}) \tag{13}$$

其中 ξ,η 是待定常数. 于是，关于 $k(x, y)$ 的方程(7) 解为：

$$k(x, y) = -\xi\eta(\mathrm{e}^{\lambda(x-y)} - \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)})(1 + \mathrm{e}^{2\lambda x_0}) \tag{14}$$

由(13) 和(14) 式得到

$$k_x(x_0, y) + p'(x_0)q(y) = 0$$

即兼容条件(11) 得到满足.

令

$$\xi\eta = -\frac{\boldsymbol{KB}}{2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x_0}(\mathrm{e}^{\lambda x_0} + \mathrm{e}^{-\lambda x_0})}$$

兼容条件(10) 也得到满足.

将(13) 式带入(11) 式得到方程(9) 的解为

$$\Phi(x) = -p(x)q(x_0)\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{\boldsymbol{K}(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x})}{\mathrm{e}^{\lambda x_0} + \mathrm{e}^{-\lambda x_0}} \tag{15}$$

对其求导

$$\Phi'(x) = \frac{\boldsymbol{K}(\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x})}{\mathrm{e}^{\lambda x_0} + \mathrm{e}^{-\lambda x_0}} \qquad \Phi''(x) = \frac{\lambda\boldsymbol{K}(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x})}{\mathrm{e}^{\lambda x_0} + \mathrm{e}^{-\lambda x_0}}$$

再将 $\Phi(x)$ 和 $\Phi''(x)$ 带入式(9)，得到当 $\lambda^2=a$ 时式(9)成立. 所以，核 $k(x,y)$，$p(x)$，$q(y)$，$\Phi(x)$ 的解为(13)，(14)，(15). 显然 $k(x,y)$，$p(x)$，$q(y)$，$\Phi(x)$ 均有界，故变换是有界算子.

2　稳定性

在变换(4)下，闭环系统(1)变换到稳定的目标系统(3). 要证明闭环系统的稳定性，需证明变换可逆，并且逆变换是有界算子.

2.1　逆变换

设逆变换 $(\boldsymbol{X}(t),w(t))\longrightarrow(\boldsymbol{X}(t),u(t))$ 为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t)\\ u(x,t)=w(x,t)+m(x)\int_0^{x_0}n(y)w(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^x l(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y+\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{X}(t)\end{cases}\tag{16}$$

其中 $m(x)$，$n(y)$，$l(x,y)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 为待定函数.

和求解 $p(x)$，$q(y)$，$k(x,y)$，$\Phi(x)$ 的方法类似，计算 u_{xx} 和 u_t 并使其满足级联系统(1)，就可以得到关于核函数 $m(x)$，$n(y)$，$l(x,y)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的方程

$$\begin{cases}l_{xx}(x,y)-l_{yy}(x,y)=0,\ l(x,x)=0,\ l(x,0)=-m(x)n(0),\ m'(x_0)n(y)+l_x(x_0,y)=0\\ m''(x)n(y)-m(x)n''(y)=0,\ n'(x_0)=0,\ m(0)=0,\ m(x)n(x_0)+\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{B}=0\\ \boldsymbol{\Psi}''(x)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{A}=0,\ \boldsymbol{\Psi}(0)=0,\ \boldsymbol{\Psi}'(x_0)=\boldsymbol{K}\end{cases}\tag{17}$$

逆变换的核方程求解同上，且 $l(x,y)$，$m(x)$，$n(y)$，$\boldsymbol{\Psi}(x)$ 均有界，即逆算子是有界算子.

2.2　稳定性

定理　对于目标系统(3)和控制律(4)，存在正数 δ 和 b 使得

$$|\boldsymbol{X}(t)|^2+\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\leqslant\delta(|\boldsymbol{X}(0)|^2+\|u(\cdot,0)\|_{L^2}^2)\mathrm{e}^{-bt}$$

即目标系统在此范数意义下指数稳定. 其中 $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ 是 $u(x,t)$ 关于 x 的 L^2 范数，符号 $\|\cdot\|$ 指向量的欧几里得范数.

证　L^2 范数简记为 $\|\cdot\|_2$. 对于目标系统(3)，选择 Lyapunov 函数

$$V(t)=\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)+\frac{c}{2}\|w^2(\cdot,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|w_x(\cdot,t)\|_2^2\tag{18}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0$ 满足

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$$

且 $\boldsymbol{Q}>O$，$c>0$ 是待定常数.

首先对(18)式关于 t 求导，有

$$\begin{gathered}\dot{V}(t)=\dot{\boldsymbol{X}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{X}}(t)^{\mathrm{T}}+c\int_0^1 w(x,t)w_t(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^1 w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\mathrm{d}x=\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{X}(t)+2w_x(x_0,t)(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)-c\|w_x(\cdot,t)\|_2^2-\|w_{xx}(\cdot,t)\|_2^2\end{gathered}\tag{19}$$

应用 Schwartz's 不等式，Young's 不等式和 Agmon's 不等式，可以得到

$$-\|w_{xx}\|_2^2\leqslant\frac{l+1}{l}\|w_x\|_2^2-w_x^2(0)$$

$$w_x(x_0,t)(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)\leqslant\frac{2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}w_x^2(x_0,t)\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\|^2+\frac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2$$

因而

$$\dot{V}(t)\leqslant-\frac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-\left(c-2\frac{\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\|^2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}-\frac{l+1}{l}\right)\|w_x\|_2^2-w_x^2(0,t)$$

取常数 c 满足 $c>2\dfrac{\|\boldsymbol{PB}\|^2}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}+\dfrac{l+1}{l}$，应用 Poincaré 不等式就有：

$$\dot{V}(t)\leqslant -bV$$

从而

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-bV}$$

其中

$$b=\min\left\{\frac{\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}{2\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})},\ \frac{2}{1+4l^2}\left(1-2\frac{\|\boldsymbol{PB}\|}{c\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})}-\frac{1+l}{c\ l}\right)\right\}$$

现在建立闭环系统范数 $\|(\boldsymbol{X}(t),u(t))\|$ 和 $V(t)$ 的关系. 由变换(2)，有

$$\|w(x,t)\|_2\leqslant\|u(x,t)\|_2+\left\|p(x)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2+\left\|\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2+\|\Phi(x)\boldsymbol{X}(t)\|_2$$

利用 Holder's 不等式和 Schwartz's 不等式，有

$$\left\|p(x)\int_0^{x_0}q(y)u(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2^2\leqslant\alpha_1^2\|u(t)\|_2^2$$

$$\left\|\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y\right\|_2^2\leqslant\alpha_2^2\|u(t)\|_2^2$$

$$\|\Phi(x)\boldsymbol{X}(t)\|_2^2\leqslant\alpha_3^2\|\boldsymbol{X}(t)\|_2^2$$

$$\|u_x(t)\|_2\leqslant\|w_x(x,t)\|_2+(\beta_4+\beta_5)\|w(t)\|_2+\beta_6\|\boldsymbol{X}(t)\|$$

$$\|w_x(t)\|_2\leqslant\|u_x(x,t)\|_2+(\alpha_4+\alpha_5)\|u(t)\|_2+\alpha_6\|\boldsymbol{X}(t)\|$$

$$\|u(t)\|_2\leqslant(1+\beta_1+\beta_2)\|w(t)\|_2+\beta_3\|\boldsymbol{X}(t)\|$$

其中

$$\alpha_1=\left(\int_0^1\int_0^1(p(x)q(y))^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\alpha_2=\left(\int_0^1\int_0^1 k(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_3=\left(\int_0^1\|\Phi(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\alpha_4=\left(\int_0^1\int_0^1(p'(x)q(y))^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_5=\left(\int_0^1\int_0^1 k_x(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\alpha_6=\left(\int_0^1\|\Psi'(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_1=\left(\int_0^1\int_0^1(m(x)n(y))^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\beta_2=\left(\int_0^1\int_0^1 l(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_3=\left(\int_0^1\|\Psi(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\beta_4=\left(\int_0^1\int_0^1(m'(x)n(y))^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_5=\left(\int_0^1\int_0^1 l_x(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\beta_6=\left(\int_0^1\|\Psi'(x)\|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

由式(18)定义的 Lyapunov 函数，通过计算得到

$$\underline{\delta}(\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|_2^2)\leqslant V(t)\leqslant\bar{\delta}(\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|u(\cdot,t)\|_2^2)$$

其中

$$\bar{\delta}=\max\left\{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\frac{c\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_6}{2},\ \frac{c(1+\alpha_1+\alpha_2)}{2}+\frac{\alpha_4+\alpha_5}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$$

$$\underline{\delta}=\frac{\min\left\{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}),\ \dfrac{c}{2}\right\}}{\max\left\{(1+\beta_3)+(1+\beta_1+\beta_2)\alpha_3,\ (1+\beta_1+\beta_2)(1+\alpha_1+\alpha_2),\ \dfrac{1}{2}\right\}}$$

令 $\delta = \frac{\overline{\delta}}{\underline{\delta}}$，得到

$$\| \boldsymbol{X}(t) \|^2 + \| u(\cdot, t) \|_2^2 \leqslant \delta (\| \boldsymbol{X}(0) \|^2 + \| u(0, t) \|_2^2) e^{-bt} \tag{20}$$

即闭环系统指数稳定.

参考文献:

[1] KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs：a Course on Backstepping Design [M]. Philadelphia：SIAM，2008：13－63.

[2] TANG Shu-xia，XIE Cheng-kang. Stabilization of a Coupled PDE-ODE System by Boundary Control [C] // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. New York：IEEE Press，2010：4042－4047.

[3] TANG Shu-xia，XIE Cheng-kang. Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System [J]. Systems & Control Letters，2011，60：540－545.

[4] SUSTO G A，KRSTIC M. Control of PDE - ODE Cascades with Neumann Interconnections [J]. Jounal of the Franklin Institute，2010，347：284－314.

[5] ZHOU Zhong-cheng，GUO Chun-li. Stabilization of Linear Heat Equation with a Heat Source at Intermediate Point by Boundary Control [J]. Automatica，2013，49(2)：448－456.

On the Boundary Control of a Cascade PDE-ODE System

ZHAO Na， XIE Cheng-kang， SI Yuan-chao

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Boundary control of a cascaded reaction-diffusion equation and an ODE system is considered，and a revised backstepping transformation is introduced. The inverse transformation is also obtained. The exponential stabilization of the closed loop is proved through the inverse transformation and its boundedness.

Key words：cascade system；boundary control；stability

责任编辑 张 构