DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.01.016

双复合 Poisson 风险模型总红利现值的研究①

赵金娥，　李　明

红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199

摘要：对常数红利边界策略下保费收入为复合 Poisson 过程的风险模型进行研究，得到了直至破产时总红利现值的矩母函数满足的积分—微分方程和边界条件，并由此推导出总红利现值的 n 阶原点矩和均值满足的积分方程和边界条件，以及在保费额及理赔额均服从指数分布下的具体表达式.

关　键　词：常红利边界策略；复合 Poisson 过程；总红利现值；矩母函数

中图分类号：O211.67　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)01-0104-06

风险理论不仅是当前保险业、精算界研究的重要课题，而且也是数学学科的一个重要分支，其主要研究和处理保险实务中的随机风险模型，并从定量的角度分析保险公司经营的安全性. 破产理论作为其中一个核心课题，在风险理论的研究中有着举足轻重的地位，而红利问题是此课题中非常重要的一个研究方向. 经典风险模型[1]假定保险公司的保费收入是时间的线性函数，但在保险公司的实际运营中，经常要根据以往的理赔经验对保费率进行调整，以致于在未来某个固定的时期内保险公司收到的保险费是随机的. 文献[2]研究了保费收入过程和理赔过程均为复合 Poisson 过程风险模型的破产概率. 文献[3]在 Boikov 的基础上研究了模型的 Gerber-Shiu 折现罚金函数，并在指数分布下得到了一些精确结果. 文献[4－5]对 Boikov 的模型进行改进，将理赔过程推广为复合 Poisson-Geometric 过程，并对破产概率进行了研究.

近年来随着人们对保险产品认知程度的逐步提高以及保险业竞争的日趋激烈，保险公司为了吸引更多客户，推出了分红保险，这使得分红与破产问题成为当前风险理论及保险精算学研究的热门课题，许多学者开始致力于研究红利边界策略下的风险模型. 而公司破产前投保人所得的总红利现值是衡量红利边界策略的一个重要参考量，它不仅代表着投保人的收益，而且在一定程度也体现了公司的实力，关于红利策略的研究可见文献[6－8]等，而这些研究都只停留在经典风险模型上. 基于以上事实，本文考虑一类常数红利边界策略下的风险模型，其中保单到达过程与理赔计数过程均为复合 Poisson 过程. 利用概率论、随机过程等学科的理论方法及盈余过程的马氏性，得到了直至破产时总红利现值的矩母函数满足的积分—微分方程和边界条件，并由此推导出总红利现值的 n 阶原点矩和期望满足的积分方程及边界条件. 最后，在保费额及理赔额均服从指数分布的情况下得到了总红利现值的均值及 n 阶原点矩的具体表达式.

1　模型引入

定义 1　设 (Ω, F, P) 是一包含本文所有随机变量的完备概率空间，则对 $t \geqslant 0$，定义保险公司在 t 时刻的盈余为：

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i =$$

① 收稿日期：2013-12-29
基金项目：国家自然科学基金(11301160)；云南省科技厅自然科学研究基金(2013FZ116)；云南省教育厅科研基金(2011C121).
作者简介：赵金娥(1978-)，女，云南大理人，讲师，主要从事金融数学方面的研究.

$$u+S_1(t)-S_2(t)$$

其中：$u\geqslant 0$ 是保险公司的初始资本；$S_1(t)=\sum_{i=1}^{M(t)}Y_i$ 表示保险公司在$(0,t]$时间内收到的总保费额，$M(t)$ 为至时刻 t 为止保险公司收到的保单数，Y_i 表示保险公司对第 i 份保单收取的保费；$S_2(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ 是保险公司在$(0,t]$时间内支付的总理赔额，$N(t)$ 为至时刻 t 为止保险公司发生的理赔次数，X_i 表示第 i 次的理赔额.

对上述模型作如下假设：

1) 计数过程$\{M(t),t\geqslant 0\}$，$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数分别为 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$ 的 Poisson 过程；

2) $X=\{X_i,i\geqslant 1\}$，$Y=\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 均为一独立的非负同分布随机变量序列，其分布函数分别为 $F(x)$,$G(y)$，且 $\overline{F}(x)=1-F(x)$，$\overline{G}(y)=1-G(y)$；

3) $\{M(t),t\geqslant 0\}$，$\{N(t),t\geqslant 0\}$，$\{X_i,i\geqslant 1\}$，$\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 相互独立.

设定一红利界限 b(其中 b 为初值且 $u\leqslant b$)，若保险公司的盈余在红利界限 b 以下，则不发放红利，若盈余超过红利界限 b，此时超出部分全部用来分红，于是在该边界策略下的双复合 Poisson 风险模型可表示为：

$$\mathrm{d}U_b(t)=\begin{cases}\mathrm{d}S_1(t)-\mathrm{d}S_2(t) & U_b(t)\leqslant b\\ -\mathrm{d}S_2(t) & U_b(t)>b\end{cases}$$

定义 2 定义保险公司的破产时刻为 $T_b=\inf\{t\geqslant 0,U_b(t)<0\mid U_b(0)=u\}$，若 $T_b=\infty$，则表示破产不会发生.

定义 3 设 $D(t)$ 为至时刻 t 为止保险公司的累积分红，则定义

$$D_{u,b}=\int_0^{T_b}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}D(t)$$

为直至破产时的总红利现值，其中 $\delta>0$ 为折现因子，且对 $0\leqslant u\leqslant b$，定义 $D_{u,b}$ 的均值、矩母函数和 n 阶原点矩分别为

$$V(u;b)=E[D_{u,b}\mid U_b(0)=u]$$

$$M(u,z;b)=E[\mathrm{e}^{zD_{u,b}}\mid U_b(0)=u]$$

$$V_n(u;b)=E[D_{u,b}^n\mid U_b(0)=u]\qquad n=1,2,3,\cdots$$

其中 $V_0(u;b)=1$.

2 $D_{u,b}$ 的矩母函数

定理 1 当 $0\leqslant u\leqslant b$ 时，矩母函数 $M(u,z;b)$ 满足下面的积分—微分方程

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2)M(u,z;b)+\delta z\frac{\partial}{\partial z}M(u,z;b)-\\&\lambda_1\left[\int_0^{b-u}M(u+y,z;b)\mathrm{d}G(y)-\int_{b-u}^{\infty}\mathrm{e}^{(u+y-b)z}M(b,z;b)\mathrm{d}G(y)\right]-\\&\lambda_2\left[\int_0^{u}M(u-x,z;b)\mathrm{d}F(x)+\overline{F}(u)\right]=0\end{aligned}\tag{1}$$

并满足边界条件：

$$M(0,z;b)=1,\ \lim_{b\to\infty}M(u,z;b)=1,\ \frac{\partial}{\partial u}M(u,z;b)\Big|_{u=b}=zM(b,z;b)$$

当 $u>b$ 时，

$$M(u,z;b)=\mathrm{e}^{(u-b)z}M(b,z;b)\tag{2}$$

证 当 $0\leqslant u\leqslant b$ 时，在很小的时间区间$(0,t]$内，利用全期望公式及盈余过程的马氏性，有

$$\begin{aligned}M(u,z;b)=&E[M(U_b(t),\mathrm{e}^{-\delta t}z;b)]=\\&[1-\lambda_1t+o(t)][1-\lambda_2t+o(t)]E[M(u,\mathrm{e}^{-\delta t}z;b)]+\end{aligned}$$

$$[\lambda_1 t + o(t)][1 - \lambda_2 t + o(t)]E[M(u+Y, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)] +$$
$$[1 - \lambda_1 t + o(t)][\lambda_2 t + o(t)]E[M(u-X, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)] + o(t) \tag{3}$$

由 Taylor 公式，有

$$M(u, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b) = M(u, z; b) - \delta z t \frac{\partial}{\partial z}M(u, z; b) + o(t) \tag{4}$$

又因为

$$E[M(u+Y, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)] = \int_0^\infty M(u+y, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}G(y) =$$
$$\int_0^{b-u} M(u+y, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}G(y) +$$
$$\int_{b-u}^\infty \mathrm{e}^{(u+y-b)z} M(b, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}G(y) \tag{5}$$

$$E[M(u-X, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)] = \int_0^\infty M(u-x, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}F(x) =$$
$$\int_0^u M(u-x, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}F(x) + \overline{F}(u) \tag{6}$$

将(4),(5),(6) 式代入(3) 式并化简，有

$$(\lambda_1 + \lambda_2)tM(u, z; b) + \delta z t \frac{\partial}{\partial z}M(u, z; b) -$$
$$\lambda_1 t\left[\int_0^{b-u} M(u+y, \mathrm{e}^{-\delta t}z; b)\mathrm{d}G(y) - \int_{b-u}^\infty \mathrm{e}^{(u+y-b)z} M(b, z\mathrm{e}^{-\delta t}; b)\mathrm{d}G(y)\right] -$$
$$\lambda_2 t\left[\int_0^u M(u-x, z\mathrm{e}^{-\delta t}; b)\mathrm{d}F(x) + \overline{F}(u)\right] + o(t) = 0$$

上式两边同时除以 t，并令 $t \to 0$，即得(1) 式.

当 $u > b$ 时，保险公司将超过 b 的那部分盈余进行分红，则(2) 式显然成立；当 $u = 0$ 时，保险公司破产，此时不支付红利，从而

$$M(0, z; b) = E[\mathrm{e}^{zD_{u,b}} \mid U_b(0) = u] = 1$$

当 $b \to \infty$ 时，保险公司不支付红利，故

$$\lim_{b\to\infty} M(u, z; b) = 1$$

将(2) 式两边关于 u 求导，并令 $u \to b$，即得

$$\frac{\partial}{\partial u}M(u, z; b)\mid_{u=b} = zM(b, z; b)$$

3　$D_{u,b}$ 的矩及具体表达式

定理 2　当 $0 \leqslant u \leqslant b$ 时，n 阶原点矩 $V_n(u; b)$ 满足以下积分方程

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + n\delta)V_n(u; b) =$$
$$\lambda_1\left[\int_0^{b-u} V_n(u+y; b)\mathrm{d}G(y) + \frac{V_n(b; b)}{n!}\overline{G}(b-u) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{V_k(b; b)}{k!\,(n-k)!}\int_{b-u}^\infty (u+y-b)^{n-k}\mathrm{d}G(y)\right] +$$
$$\lambda_2\int_0^u V_n(u-x; b)\mathrm{d}F(x) \tag{7}$$

并满足边界条件：

$$V_n(0; b) = 0,\ \lim_{b\to\infty} V_n(u; b) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u}V_n(u; b)\mid_{u=b} = nV_{n-1}(b; b)$$

当 $u > b$ 时，

$$V_n(u; b) = \sum_{k=0}^n C_n^k (u-b)^{n-k} V_k(b; b) \tag{8}$$

证　由定义 3 有

$$M(u,z;b)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n(u;b)}{n!}z^n$$

将其代入(1),(2)式并比较 z^n 的系数即得(7),(8)式.

当 $u=0$ 时,保险公司破产,此时不支付红利,从而

$$V_n(0,b)=E[D_{u,b}^n \mid U(0)=0]=0$$

当 $b\to\infty$ 时,保险公司不支付红利,所以

$$\lim_{b\to\infty}V_n(u,b)=E[D_{u,b}^n \mid U(0)=u]=0$$

将(8)式两边关于 u 求导,并令 $u\to b$,可得

$$\frac{\partial}{\partial u}V_n(u;b)\mid_{u=b}=nV_{n-1}(b;b)$$

一般情形下很难得到 $V_n(u;b)$ 的精确解,但在理赔额与保费额均服从指数分布时可得到其精确解.设

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}(x>0)\qquad G(y)=1-\mathrm{e}^{-\beta y}(y>0)$$

则(7)式为

$$(\lambda_1+\lambda_2+n\delta)V_n(u;b)=\lambda_1\left[\int_0^{b-u}V_n(u+y;b)\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y+\left(\frac{V_n(b;b)}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{V_k(b;b)}{k!\ \beta^{n-k}}\right)\mathrm{e}^{-\beta(b-u)}\right]+\lambda_2\int_0^u V_n(u-x;b)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x \tag{9}$$

(9)式两边对 u 求导,有

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2+n\delta)V'_n(u;b)+(\lambda_1\beta-\lambda_2\alpha)V_n(u;b)=\\&\lambda_1\beta\left[\int_0^{b-u}V_n(u+y;b)\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y+\left(\frac{V_n(b;b)}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{V_k(b;b)}{k!\ \beta^{n-k}}\right)\mathrm{e}^{-\beta(b-u)}\right]-\\&\lambda_2\alpha\int_0^u V_n(u-x;b)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式两边再对 u 求导,有

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2+n\delta)V''_n(u;b)+(\lambda_1\beta-\lambda_2\alpha)V'_n(u;b)+(\lambda_1\beta^2+\lambda_2\alpha^2)V_n(u;b)=\\&\lambda_1\beta^2\left[\int_0^{b-u}V_n(u+y;b)\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y+\left(\frac{V_n(b;b)}{n!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{V_k(b;b)}{k!\ \beta^{n-k}}\right)\mathrm{e}^{-\beta(b-u)}\right]+\\&\lambda_2\alpha^2\int_0^u V_n(u-x;b)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11}$$

由(9),(10),(11)式,有

$$(\lambda_1+\lambda_2+n\delta)V''_n(u;b)-[\lambda_2\beta-\lambda_1\alpha+n\delta(\beta-\alpha)]V'_n(u;b)-n\delta\alpha\beta V_n(u;b)=0$$

解之得

$$V_n(u;b)=C_{1,n}\mathrm{e}^{r_1u}+C_{2,n}\mathrm{e}^{r_2u},\ 0\leqslant u\leqslant b \tag{12}$$

其中 r_1,r_2 是方程

$$(\lambda_1+\lambda_2+n\delta)r^2-[\lambda_2\beta-\lambda_1\alpha+n\delta(\beta-\alpha)]r-n\delta\alpha\beta=0 \tag{13}$$

的根.又由 $V_n(0;b)=0$,有

$$C_{1,n}+C_{2,n}=0 \tag{14}$$

将(12)式代入(9)式,并由方程(13),有

$$\begin{aligned}&\left[\lambda_1\left(\frac{\beta}{r_1-\beta}+\frac{1}{n!}\right)\mathrm{e}^{r_1b}-\lambda_2\frac{\alpha}{\alpha+r_1}\mathrm{e}^{\beta(b-u)-\alpha u}\right]C_{1,n}+\\&\left[\lambda_1\left(\frac{\beta}{r_2-\beta}+\frac{1}{n!}\right)\mathrm{e}^{r_2b}-\lambda_2\frac{\alpha}{\alpha+r_2}\mathrm{e}^{\beta(b-u)-\alpha u}\right]C_{2,n}+\\&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_1}{k!\ \beta^{n-k}}\mathrm{e}^{r_1b}C_{1,k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_1}{k!\ \beta^{n-k}}\mathrm{e}^{r_2b}C_{2,k}+\frac{\lambda_1}{\beta^n}=0\end{aligned} \tag{15}$$

记

$$a_{1,k}=\lambda_1\left(\frac{\beta}{r_1-\beta}+\frac{1}{k!}\right)e^{r_1 b}-\lambda_2\frac{\alpha}{\alpha+r_1}e^{\beta(b-u)-\alpha u}$$

$$a_{2,k}=\lambda_1\left(\frac{\beta}{r_2-\beta}+\frac{1}{k!}\right)e^{r_2 b}-\lambda_2\frac{\alpha}{\alpha+r_2}e^{\beta(b-u)-\alpha u}$$

$$b_{1,k}=\frac{\lambda_1}{k!\ \beta^{n-k}}e^{r_1 b},\ b_{2,k}=\frac{\lambda_1}{k!\ \beta^{n-k}}e^{r_2 b}$$

并规定当 $k\leqslant 0$ 时，$a_{s,k}=b_{s,k}=0(s=1,2)$. 则由(14)式和(15)式，得

$$C_{1,k}=\frac{\lambda_1}{\beta^k(a_{1,k}-a_{2,k})}-\frac{\lambda_1(b_{1,k-1}-b_{2,k-1})}{\beta^{k-1}(a_{1,k}-a_{2,k})(a_{1,k-1}-a_{2,k-1})}-$$

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{k-2}\frac{(b_{1,s}-b_{2,s})\prod\limits_{j=s+1}^{k-1}[(a_{1,j}-a_{2,j})-(b_{1,j}-b_{2,j})]}{\beta^i\prod\limits_{j=i}^{k}(a_{1,j}-a_{2,j})}\qquad k=1,2,3,\cdots,n$$

$$C_{2,k}=-\frac{\lambda_1}{\beta^k(a_{1,k}-a_{2,k})}+\frac{\lambda_1(b_{1,k-1}-b_{2,k-1})}{\beta^{k-1}(a_{1,k}-a_{2,k})(a_{1,k-1}-a_{2,k-1})}+$$

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{k-2}\frac{(b_{1,s}-b_{2,s})\prod\limits_{j=s+1}^{k-1}[(a_{1,j}-a_{2,j})-(b_{1,j}-b_{2,j})]}{\beta^i\prod\limits_{j=i}^{k}(a_{1,j}-a_{2,j})}\qquad k=1,2,3,\cdots,n$$

故

$$V_n(u;b)=\begin{cases}C_{1,n}e^{r_1 u}+C_{2,n}e^{r_2 u} & 0\leqslant u\leqslant b\\ \sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(u-b)^{n-k}V_k(b;b) & u>b\end{cases}\qquad n=1,2,3,\cdots\tag{16}$$

显然，当 $n=1$ 时，$V_1(u;b)=V(u;b)$，故由定理 2，有

推论 1　当 $0\leqslant u\leqslant b$ 时，$D_{u,b}$ 的均值 $V(u;b)$ 满足如下积分方程：

$$(\lambda_1+\lambda_2+\delta)V(u;b)=\lambda_1\left[\int_0^{b-u}V(u+y;b)\mathrm{d}G(y)+V(b;b)\overline{G}(b-u)+\int_{b-u}^{\infty}(u+y-b)\mathrm{d}G(y)\right]+$$

$$\lambda_2\int_0^u V(u-x;b)\mathrm{d}F(x)$$

并满足边界条件：

$$V(0;b)=0,\ \lim_{b\to\infty}V(u;b)\mid_{u=b}=0,\ \frac{\partial}{\partial u}V(u;b)\mid_{u=b}=1$$

当 $u>b$ 时，$V(u;b)=u-b+V(b;b)$.

类似于定理 2，当 $F(x)=1-e^{-\alpha x}(x>0)$，$G(y)=1-e^{-\beta y}(y>0)$ 时，可得到 $V(u;b)$ 的具体表达式为

$$V(u;b)=\begin{cases}C_1e^{r_3 u}+C_2e^{r_4 u} & 0\leqslant u\leqslant b\\ u-b+V(b;b) & u>b\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{\lambda_1}{\beta}\left[\lambda_1\left(\dfrac{r_3e^{br_3}}{r_3-\beta}-\dfrac{r_4e^{br_4}}{r_4-\beta}\right)-\alpha\lambda_2\dfrac{r_4-r_3}{(r_3+\alpha)(r_4+\alpha)}e^{\beta(b-u)-\alpha u}\right]^{-1}\\ C_2=\dfrac{\lambda_1}{\beta}\left[\lambda_1\left(\dfrac{r_3e^{br_3}}{\beta-r_3}-\dfrac{r_4e^{br_4}}{\beta-r_4}\right)+\alpha\lambda_2\dfrac{r_4-r_3}{(r_3+\alpha)(r_4+\alpha)}e^{\beta(b-u)-\alpha u}\right]^{-1}\end{cases}$$

而 r_3,r_4 是方程

$$(\lambda_1+\lambda_2+\delta)r^2-[\lambda_2\beta-\lambda_1\alpha+\delta(\beta-\alpha)]r-\delta\alpha\beta=0$$

的根.

参考文献:

[1] LUNDBERG F I. Approximerad Framstallning av Scannolikhetsfunktionen Ⅱ Aterforsakring av Kollektivrisker [D]. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903.

[2] BOIKOV A V. The Cramér-Lundberg Model with Stochastic Premium Process [J]. Theory of Probability and Its Applications, 2003, 47(3): 489-493.

[3] 姚定俊,汪荣明,徐 林. 随机保费风险模型下的平均折现罚金函数 [J]. 应用概率统计, 2008, 24(3): 319-326.

[4] 赵金娥,王贵红,龙 瑶. 理赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(3): 78-83.

[5] 赵金娥,王贵红,龙 瑶. 一类双险种风险模型的破产概率 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2013, 38(1): 17-22.

[6] LIN X S, WILLMOT G E, STEVE D. The Classical Model with a Constant Dividend Barrier: Anlysis of the Gerber-Shiu Discounted Penalty Function [J]. Insurance: Mathematics and Economics 2003, 33(3): 551-566.

[7] 刘 娟,徐建成. 马氏相依风险模型红利折现的矩 [J]. 数学物理学报: A辑, 2009, 29(5): 1390-1397.

[8] 郭淑妹,郭 杰,张 宁. 带干扰和支付红利的经典风险模型的最优投资 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2013, 38(1): 22-25.

The Discounted Dividend Payments in the Double Compound Poisson Risk Model

ZHAO Jin-e, LI Ming

College of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China

Abstract: In this paper, the risk model whose premium income process is a compound Poisson process is considered with the constant dividend barrier strategy, and an integral-differential equation with boundary conditions for the moment generating function of the discounted dividend payments until ruin is obtained. In addition, the integral equations with boundary conditions for the expectation and the high order moments of the discounted dividend payments are given. Finally, the explicit expressions for the expectation and the high order moments of the discounted dividend payments are derived when the individual stochastic premium amount and claim amount are exponentially distributed.

Key words: constant dividend barrier strategy; compound Poisson process; the total discounted dividend payment; the moment generating function

责任编辑 张 枸