DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.03.014

半离散 5 阶非线性 KdV 方程的全局吸引子①

张青义， 朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究在 ℝ 上具有周期边界条件的半离散 5 阶非线性 KdV 型方程解的长时间行为. 首先利用 Crank-Nicolson 格式对其进行离散，然后证明了该方程在 H^5 上紧的全局吸引子的存在.

关 键 词：5 阶非线性 KdV 方程；全局吸引子；Gronwall 不等式；Crank-Nicolson 格式

中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2015)03-0082-05

本文将用离散的方式研究无界区域 ℝ 上具有周期边界 5 阶非线性 KdV 型方程解的长时间行为：

$$\begin{cases} u_t + u\,u_x + u_{xxx} + u_{5x} + \alpha u = f(x) & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(x+T) = u(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega = (0, L)$，$\alpha > 0$ 是耗散系统，$f(x) \in L^2(\Omega)$ 是不依赖于时间的外力项函数.

KdV 方程是 1895 年由荷兰数学家科特韦格(Korteweg)和德弗里斯(deVries)共同发现的一种偏微分方程(也有人称之为科特韦格－德弗里斯方程，但一般都习惯直接叫 KdV 方程). 由于 KdV 方程自身的复杂性以及描述物理现象的能力，很多学者对 KdV 方程做了大量的研究，其中：文献[1]研究了具阻尼 KdV-KsV 方程的整体吸引子；文献[2]研究了弱阻尼广义 KdV 方程的整体吸引子；文献[3]研究了具有可加噪声的耗散 KdV 型方程的随机吸引子. 除此之外，很多学者对于 Schrödinger，Kawahara，KdV 等非线性方程的全局吸引子做了大量的研究：文献[4－5]对非线性方程的吸引子的正则性做了一定的研究；文献[6－7]证明了非线性的弱耗散方程的全局吸引子的存在；文献[8]证明了弱耗散的双曲方程的吸引子的存在.

但是在本文中我们采用的不是传统的证明吸引子存在的方法，而是用 Crank-Nicolson 格式对 5 阶非线性 KdV 型方程进行时间离散，再利用一致先验估计的方法证明离散全局吸引子的存在性.

下面介绍一种与(1)式有关的 Crank-Nicolson 格式：首先对于给定的 $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$，(1)式存在唯一解 $u \in C([0,\infty], H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty], H^{-1}(\mathbb{R}))$，(1)式等价于

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\alpha t} u_t) + \nabla (e^{\frac{\alpha t}{2}} u)^2 + (e^{\alpha t} u)_{xxx} + (e^{\alpha t} u)_{5x} = e^{\alpha t} f(x) \tag{2}$$

对于给定的时间离散 $\tau > 0$，我们考虑定义为 $\tau^n = n\tau$ 的时间一致序列 $(t^n)_n$，并且将(2)式在时间区间 $[t^n, t^{n+1}]$ 上积分，有

① 收稿日期：2014-04-14
基金项目：国家自然科学基金项目(61273020，11071266)；西南大学博士后基金(102060-207153).
作者简介：张青义(1989-)，男，湖南怀化人，硕士研究生，主要从事非线性偏微分方程理论及其应用研究.
通信作者：朱朝生，副教授.

$$(e^{\alpha t^{n+1}}u(t^{n+1})-e^{\alpha t^{n}}u(t^{n}))+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\nabla(e^{\frac{\alpha t}{2}}u)^2+(e^{\alpha t}u)_{xxx}+(e^{\alpha t}u)_{5x}\mathrm{d}t=\int_{t^n}^{t^{n+1}}e^{\alpha t}f(x)\mathrm{d}t \tag{3}$$

利用梯形面积法则知

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}g(s)\mathrm{d}s\sim\frac{\tau}{2}(g(t^{n+1})+g(t^n)) \tag{4}$$

上式的估计误差为

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}g(s)\mathrm{d}s-\frac{\tau}{2}[g(t^{n+1})+g(t^n)]=-\frac{\tau^3}{12}g''(\varepsilon)$$

令子列 $u^n\sim u(t^n)$，这里 u 是(1)式的解的连续形式. 在(3)式中使用(4)式的法则，令 $\beta=e^{-\alpha t}$，有

$$\frac{1}{\tau}(u^{n+1}-\beta u^n)+\frac{1}{8}\nabla(u^{n+1}+\beta u^n)^2+\frac{1}{2}\partial_x^3(u^{n+1}+\beta u^n)+\frac{1}{2}\partial_x^5(u^{n+1}+\beta u^n)=\frac{1+\beta}{2}f$$

假设 $\alpha\tau\ll 1$，为了得到相同的连续估计，我们用 f 来代替$\frac{1+\beta}{2}f$. 因此，有

$$\frac{1}{\tau}(u^{n+1}-\beta u^n)+\frac{1}{8}\nabla(u^{n+1}+\beta u^n)^2+\frac{1}{2}\partial_x^3(u^{n+1}+\beta u^n)+\frac{1}{2}\partial_x^5(u^{n+1}+\beta u^n)=f \tag{5}$$

下面陈述本文要证明的主要结果：

定理1　若 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 且满足 $8\sqrt{\tau}\parallel f\parallel_{L^2}^2\leqslant c\lambda^2$，那么方程(5)存在一个离散的半群 S^n，$n\geqslant 1$ 并且使得对于 $\forall u_0\in E$，$u^{n+1}=Su^n=S^{n+1}u_0$ 是(5)式的解，这里 $E=\{v\in L^2(\mathbb{R}^1):\sqrt{\tau}\parallel v\parallel_{L^2}^2<\tilde{c}\}$，其中 $\tilde{c}$ 是一个与$\frac{1}{\alpha}$，$\parallel f\parallel_{L^2}$，$\parallel u_0\parallel_{L^2}$ 有关的正整数.

定理2　定理1中定义的离散的半群 S 即 $Su^n=u^{n+1}:E\longrightarrow E$，在 $H^5(\mathbb{R})$ 上有一个紧的全局吸引子.

引理1　假设 $\alpha\tau\ll 1$ 是充分小的，那么：

$$\parallel u^n\parallel_{L^2}^2\leqslant\beta^n\parallel u_0\parallel_{L^2}^2+(1-\beta^n)\frac{8}{\alpha^2}\parallel f\parallel_{L^2}^2 \tag{6}$$

证　方程(5)与 $u^{n+1}+\beta u^n$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上作内积，得

$$\parallel u^{n+1}\parallel_{L^2}^2\leqslant\beta^2\parallel u^n\parallel_{L^2}^2+\tau\mid(f,u^{n+1}+\beta u^n)\mid$$

由 Young 不等式可得

$$(1-\frac{\alpha\tau}{4})\parallel u^{n+1}\parallel_{L^2}^2\leqslant\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)\beta^2\parallel u_n\parallel_{L^2}^2+\frac{2\tau}{\alpha}\parallel f\parallel_{L^2}^2$$

当 $\alpha\tau$ 足够小时，我们有

$$\beta\left(1-\frac{\alpha\tau}{4}\right)^{-1}\left(1+\frac{\alpha\tau}{4}\right)\leqslant 1$$

所以

$$\parallel u^{n+1}\parallel_{L^2}^2\leqslant\beta\parallel u_n\parallel_{L^2}^2+\frac{4\tau}{\alpha}\parallel f\parallel_{L^2}^2$$

由离散的 Gronwall 引理，有

$$\parallel u^n\parallel_{L^2}^2\leqslant\beta^n\parallel u_0\parallel_{L^2}^2+(1-\beta^n)\frac{4\alpha\tau}{\alpha^2(1-\beta)}\leqslant\beta^n\parallel u_0\parallel_{L^2}^2+(1-\beta^n)\frac{8}{\alpha^2}\parallel f\parallel_{L^2}^2$$

我们引入集合

$$E=\{v\in L^2(\mathbb{R}):\sqrt{\tau}\parallel v\parallel_{L^2}^2<\tilde{c}\}$$

由引理1知，若 $u_0\in E$，$f\in L^2(\mathbb{R})$ 且满足 $8\sqrt{\tau}\parallel f\parallel_{L^2}^2\leqslant\tilde{c}\alpha^2$，那么对所有的 $n\in N^*$，有 $u^n\in E$. 我们把(5)式改写成

$$\frac{\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}-\beta u^n\right)}{\frac{\tau}{2}}+\frac{1}{2}\nabla\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)^2+\partial_x^3\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)+\partial_x^5\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)=f \tag{7}$$

如果 $u^0,u^1,\cdots,u^n$ 都能在 E 中得到，利用 Banach 不动点定理我们只需要寻找 $\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}$，而不是 u^{n+1}，为此考虑泛函

$$\mathfrak{I}(w)=\beta\mathscr{R}u^n+\frac{\tau}{2}\mathscr{R}f-\frac{\tau}{4}\mathscr{R}\partial_x^2 w^2$$

其中，$\mathscr{R}=(1+\frac{\tau}{2}\partial_x^3+\frac{\tau}{2}\partial_x^5)^{-1}$. 我们对 τ 作一些限制，当 τ 足够小时，我们有下面的引理.

引理 2　存在一个正常数 c 使得：

（1）$\|\mathscr{R}\|_{\mathscr{L}(L^2,H^s)}\leqslant\left(\frac{2}{\tau}\right)^{\frac{s}{5}}$，$\forall\, 0\leqslant s\leqslant 5$.

（2）$\|\partial_x\mathscr{R}\|_{\mathscr{L}(L^1,L^2)}\leqslant\frac{c}{\sqrt{\tau}}$.

证　由文献[9]中引理 1 的证明方法可得引理 2.

引理 3　存在一个正常数 $c=c\left(\frac{1}{\alpha},\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2}\right)$，使得：

$$\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^5}\leqslant\frac{c}{\tau}$$

证　由 G-N 不等式、Agmon's 不等式、引理(1)－(2)、Young 不等式、Soblove 嵌入不等式和 $u^n\in H^1$，有

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^5}\leqslant\\
&\frac{1}{\tau}\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+\left\|\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right)^2\right\|_{L^2}\leqslant\\
&\frac{1}{\tau}\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{L^\infty}\left\|\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right)\right\|_{L^2}\leqslant\\
&\frac{1}{\tau}\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\leqslant\\
&\frac{1}{\tau}\|u\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}+c\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{L^2}^{\frac{17}{10}}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{H^5}^{\frac{3}{10}}\leqslant\\
&c\left(\frac{1}{\alpha},\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2}\right)\left(\frac{1}{\tau}+\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{22}\right\|_{H^5}^{\frac{3}{10}}\right)\leqslant\\
&\frac{1}{\tau}c\left(\frac{1}{\alpha},\|f\|_{L^2},\|u_0\|_{L^2}\right)+\frac{3}{10}\left\|\frac{u^{n+1}+\beta u^n}{2}\right\|_{H^5}
\end{aligned}$$

由此得引理 3.

定理 1 的证明　我们通过 Banach 不动点定理来证明(5)式的解的唯一性. 若 u_n 存在，w 是 $\mathfrak{I}$ 上的一个定点，令 $u^{n+1}=2w-\beta u^n$.

$$\mathfrak{I}(w)=\beta\mathscr{R}u^n+\frac{\tau}{2}\mathscr{R}f-\frac{\tau}{4}\mathscr{R}\partial_x^2 w^2$$

$$F=\left\{v\in L^2:\|v\|\leqslant M=2\|u^n\|_{L^2}+\|f\|_{L^2}\leqslant\frac{3\sqrt{\tilde{c}}}{\tau^{\frac{1}{\tau}}}\right\}$$

由引理 2、引理 3、G-N 不等式得：

$$
\begin{aligned}
\| \mathscr{T}(w) \|_{L^2} &\leqslant \beta \| u^n \|_{L^2} + \frac{\tau}{2} \| f \|_{L^2} + \frac{c\tau^{\frac{1}{2}}}{4} \| w \|_{L^2}^2 \leqslant \\
&\| u^n \|_{L^2} + \frac{1}{2} \| f \|_{L^2} + \frac{c\tau^{\frac{1}{2}}}{4} M^2 \leqslant \\
&\frac{M}{2} + \frac{3c\sqrt{\tilde{c}}\,\tau^{\frac{1}{4}}}{4}
\end{aligned}
$$

如果$\frac{3c\sqrt{\tilde{c}}\,\tau^{\frac{1}{4}}}{2} < \frac{1}{2}$，则 $\mathscr{T}$ 是 F 到 F 的映射，下面证明 $\mathscr{T}$ 是压缩映射：

$$
\mathscr{T}(w_1) - \mathscr{T}(w_2) = \frac{\tau}{4} \mathscr{R} \partial_x [(w_1 - w_2)(w_1 - w_2)]
$$

$$
\begin{aligned}
\| \mathscr{T}(w_1) - \mathscr{T}(w_2) \|_{L^2} &\leqslant c\tau^{\frac{1}{2}} M \| w_1 - w_2 \|_{L^2} \leqslant \\
&3c\sqrt{\tilde{c}}\,\tau^{\frac{1}{4}} \| w_1 - w_2 \|_{L^2}
\end{aligned}
$$

若 $3c\sqrt{\tilde{c}}\,\tau^{\frac{1}{4}} < 1$，则 $\mathscr{T}$ 是压缩映射. 证毕.

定理 2 的证明 (5) 式的任意解 u^n 可以分解成：

$$
u^n = v^n + w^n \qquad \forall\, n \in N
$$

$$
\begin{cases}
\frac{v^{n+1} - \beta v^n}{\tau} + \partial_x^3 (\frac{v^{n+1} + \beta v^n}{2}) + \partial_x^5 \left(\frac{v^{n+1} + \beta v^n}{2} \right) = 0 \\
v^0 = u_0
\end{cases} \tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{w^{n+1} - \beta w^n}{\tau} + \partial_x^3 \left(\frac{w^{n+1} + \beta w^n}{2} \right) + \partial_x^5 \left(\frac{w^{n+1} + \beta w^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{w^{n+1} + \beta w^n}{2} \right)^2 = f \\
w^0 = 0
\end{cases} \tag{9}
$$

问题(8),(9) 是适定的，由引理 1 和引理 3 知，v^n 和 w^n 满足：

$$
\lim_{n \to \infty} \| v^n \| = 0
$$

并且存在一个正整数 $c = c\left(\frac{1}{\alpha},\ \| f \|_{L^2},\ \| u_0 \|_{L^2} \right)$使得

$$
\| \partial_x^5 w^n \|_{L^2} \leqslant \frac{c}{\tau}
$$

由此可知半群 $S^n u_0 = v^n + w^n$ 可分解为一个紧的映射和一个收敛到零的有界集. 定理 2 证毕.

参考文献：

[1] 夏红强. 具阻尼 KdV-KsV 方程的整体吸引子 [J]. 应用数学，1999，12(1)：31－35.

[2] 党金宝，王 磊，林广国. 弱阻尼广义 KdV 方程的整体吸引子 [J]. 数学研究，2010，3(1)：39－49.

[3] 杜先云，陈 炜. 具有可加噪声的耗散 KdV 型方程的随机吸引子 [J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2012，35(5)：651－655.

[4] AKROUNE N. Regularity of the Attractor for a Weakly Damped Nonlinear Schrodinger Equation on ℝ [J]. Applied Mathematics Letters，1999，12(1)：45－48.

[5] ZHU C S，MU C L，PU Z L. Attractor for the Nonlinear Schrodinger Equation with a Non-Local Nonlinear Term [J]. Journal of Dynamical and Control Systems，2010，16(4)：585－603.

[6] GOUBET O. Global Attractor for Weakly Damped Nonlinear Schrodinger Equations in $L^2(\mathbb{R})$ [J]. Nonlinear Analysis Theory，2009，71(2)：317－320.

[7] 谢周艳，朱朝生. 无界区域 R^1 上耗散 mBBM 方程的全局吸引子 [J]. 西南师范大学学报：自然科学学版，2013，38(5)：15－19.

[8] GHIDAGLIA J M，TEMAM R. Attractors for Damped Nonlinear Hyperbolic Equations [J]. Journal de Mathematiques Pures et appliquées，1987，66(3)：273－319.

[9] GOUBET O，ZAHROUNI E. On a Time Discretization of a Weakly Damped Forced Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Communication on Pure Applied Analysis，2008，7(6)：1429－1442.

Global Attractor for a Semi-Discrete Five-Order Nonlinear KdV Equation

ZHANG Qing-yi[1]，　ZHU Chao-sheng[2]

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：We study the long-time behaviour of a semi-discrete KdV equation in R^1 with a periodical boundary. First，we use the Crank-Nicolson scheme to discrete this equation to prove that such a semi-discrete equation possesses a global attractor in H^5. Then we show that this global attractor is actually a compact set of H^5.

Key words：five-order nonlinear KdV equation；global attractor；Gronwall inequality；Crank-Nicolson scheme

责任编辑　张　枸