DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.03.017

α-预不变凸函数的若干性质①

王海英，　符祖峰，　何　芝

安顺学院 数理学院，贵州 安顺 561000

摘要：考虑了一类广义凸函数——α-预不变凸函数，利用中间点的α-预不变凸性，讨论了α-预不变凸函数与半连续函数之间的关系，得到了α-预不变凸函数的一些性质.

关　键　词：α-预不变凸函数；上半连续；下半连续

中图分类号：O174　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)03-0099-07

凸性和广义凸性在最优化理论和方法的研究中起着重要的作用，因此对凸性和广义凸性的探究是数学规划领域的重要内容之一. 近年来，人们提出了各类广义凸函数：文献[1-2]介绍了不变凸集和预不变凸函数的定义；文献[3]提出了严格预不变凸和半严格预不变凸；文献[4]给出了α-不变凸集、α-预不变凸函数、严格α-预不变凸函数和半严格α-预不变凸函数的定义.

文献[5]给出了凸函数的一个重要结果，即：

引理 1[5]　若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集，f 是定义在 K 上的连续函数，如果对于 $\forall x, y \in K$，有

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x)+\frac{1}{2} f(y)$$

则 f 是 K 上的凸函数.

这个结果的重要性在于凸性可以由连续性条件下的中间点凸性确定. 文献[6]将凸函数的这个重要结果推广到预不变凸函数情形，得到了预不变凸函数的两个等价条件：

引理 2[6]　若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是开不变凸集，η 满足条件 $\eta(y, y+\lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y)$，$f$ 满足条件 $f(y+\eta(x, y)) \leqslant f(x)$，则 f 是预不变凸函数等价于 f 上半连续，且 $\exists \lambda \in (0, 1)$，对 $\forall x, y \in K$，有

$$f(y+\lambda\eta(x, y)) \leqslant (1-\lambda) f(y)+\lambda f(x)$$

引理 3[6]　若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是开不变凸集，η 满足条件 $\eta(y, y+\lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y)$，$f$ 满足条件 $f(y+\eta(x, y)) \leqslant f(x)$，则 f 是预不变凸函数等价于 f 下半连续，且 $\exists \lambda \in (0, 1)$，对 $\forall x, y \in K$，有

$$f(y+\lambda\eta(x, y)) \leqslant (1-\lambda) f(y)+\lambda f(x)$$

文献[7]曾给出凸函数的一个等价条件，即：

引理 4[7]　若 K 是凸集，则 f 是凸函数等价于 $\forall x, y \in K$，$g(\lambda)=f(y+\lambda(x-y))$ 是$[0, 1]$上的凸函数.

文献[8]将凸函数的这个结果推广到预不变凸函数情形，得到了预不变凸函数的一个等价条件：

---

①　收稿日期：2014-04-13

基金项目：国家自然科学青年基金资助项目(61304146)；贵州省科技厅、安顺市政府、安顺学院三方联合基金(黔科合 J 字 LKA[2013]19 号)；贵州省高校优秀科技创新人才支持计划资助项目(黔教合 KY 字[2012]101 号).

作者简介：王海英(1982-)，女，河南南阳人，硕士，主要从事非线性泛函分析和最优化理论的研究.

通信作者：符祖峰，讲师.

引理 5[5] 若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是不变凸集，η 满足条件 $\eta(y, y+\lambda\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y)$，$f$ 满足条件 $f(y+\eta(x, y)) \leqslant f(x)$，则对 $\forall x, y \in K$，f 是预不变凸函数当且仅当 $g(\lambda) = f(y+\lambda\eta(x, y))$ 是$[0, 1]$上的凸函数.

关于预不变凸性的其他研究成果可参见文献[9-10]. 由于预不变凸函数是 α -预不变凸函数的特殊情形，因此我们考虑将引理 1 和引理 4 的结果进一步推广到 α -预不变凸函数情形. 首先利用半连续函数的性质和中间点的 α -预不变凸性，讨论了 α -预不变凸函数与半连续函数之间的关系，得到了半连续条件下 α -预不变凸函数的两个等价条件；其次得到了 α -预不变凸函数、严格 α -预不变凸函数、半严格 α -预不变凸函数各自的一个等价条件，从而推广了有关结果.

1 预备知识

为阐述本文的主要结果，我们先引进一些概念及条件.

定义 1[11] 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集，$\lambda \in [0, 1]$，f 是定义在 K 上的函数，如果对于 $\forall x, y \in K$，有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1}$$

则称 f 是 K 上的凸函数. 如果当 $x \neq y$ 时(1)式中严格不等式成立，即

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2}$$

则称 f 是 K 上的严格凸函数. 如果当 $f(x) \neq f(y)$ 时(1)式中严格不等式成立，即

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{3}$$

则称 f 是 K 上的半严格凸函数.

定义 2[12] 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是非空凸集，$\lambda \in [0, 1]$，f 是定义在 K 上的函数，如果对于 $\forall x, y \in K$，有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \tag{4}$$

则称 f 是 K 上的拟凸函数. 如果当 $x \neq y$ 时(4)式中严格不等式成立，即

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\} \tag{5}$$

则称 f 是 K 上的严格拟凸函数. 如果当 $f(x) \neq f(y)$ 时(4)式中严格不等式成立，即

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\} \tag{6}$$

则称 f 是 K 上的半严格拟凸函数.

以下我们约定集合 K 是实 Hilbert空间 H 的一个非空子集，$\alpha: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 是实值函数，$\eta: K \times K \longrightarrow H$ 是向量值函数.

定义 3[4] 如果对于 $\forall x, y \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，有

$$y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y) \in K \tag{7}$$

则称 K 是关于 η 和 α 的 α -不变凸集.

定义 4[4] 设 K 是 α -不变凸集，f 是定义在 K 上的函数，如果对于 $\forall x, y \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$ 有

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x) \tag{8}$$

则称 f 是 K 上的 α -预不变凸函数. 如果当 $x \neq y$ 时(8)式中严格不等式成立，即

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) < (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x) \tag{9}$$

则称 f 是 K 上的严格 α -预不变凸函数. 如果当 $f(x) \neq f(y)$ 时(8)式中严格不等式成立，即

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) < (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x) \tag{10}$$

则称 f 是 K 上的半严格 α -预不变凸函数.

下面的讨论中将用到条件 A 和条件 B，为此我们先给出这两个条件的内容.

条件 A[13] $\forall x, y \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，$\eta$ 和 α 满足下列关系式

$$\eta(y, y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) = -\lambda\eta(x, y)$$

$$\eta(x, y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) = (1-\lambda)\eta(x, y)$$

显然 $t=0$，$\eta(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

条件 B[13] $f(y + \alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant f(x)$，$\forall x, y \in K$.

2　主要结果

本节我们将在中间点 α -预不变凸性和适当条件下，建立 α -预不变凸函数与上半连续函数、下半连续函数之间的关系. 同时得到 α -预不变凸函数、严格 α -预不变凸函数和半严格 α -预不变凸函数的一个等价条件及一些简单的推论.

定理 1　设 K 是关于 η 和 α 的 α -不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件 $\alpha(x, y)=\alpha(y, y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))$，$f$ 上半连续且满足条件 B，则 f 关于相同的 η 和 α 是 α -预不变凸函数等价于 $\exists\gamma\in(0, 1)$，对 $\forall x, y\in K$，有

$$f(y+\gamma\alpha(x, y)\eta(x, y))\leqslant(1-\gamma)f(y)+\gamma f(x)$$

证　必要性可以直接由 α -预不变凸函数的定义得到，只需证明充分性.

假设 f 关于相同的 η 和 α 不是 α -预不变凸函数，则存在 $\bar{\lambda}\in(0, 1)$，$x, y\in K$，使得

$$f(y+\bar{\lambda}\alpha(x, y)\eta(x, y))>\bar{\lambda}f(x)+(1-\bar{\lambda})f(y)$$

令

$$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)$$

因 f 上半连续，则 $g(\lambda)$ 在 $[0, 1]$ 上也上半连续，且 $g(0)=0$，$g(\bar{\lambda})>0$. 再由 f 满足条件 B，可知

$$g(1)=f(y+\alpha(x, y)\eta(x, y))-f(x)\leqslant 0$$

令

$$\lambda_1=\sup_{\lambda<\bar{\lambda}}\{\lambda: g(\lambda)=0\}$$

$$\lambda_2=\inf_{\lambda<\bar{\lambda}}\{\lambda: g(\lambda)=0\}$$

则由 $g(\lambda)$ 的上半连续性，得

$$g(\lambda_1)=g(\lambda_2)=0$$

即

$$f(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y))-\lambda_1 f(x)-(1-\lambda_1)f(y)=0$$

$$f(y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))-\lambda_2 f(x)-(1-\lambda_2)f(y)=0$$

且 $0\leqslant\lambda_1<\bar{\lambda}<\lambda_2\leqslant 1$.

令

$$x*=y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y),\quad y*=y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)$$

因为 η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x, y)=\alpha(y, y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))$$

从而根据文献[14] 中的引理 3.1 可得

$$\alpha(x, y)=\alpha(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y), y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))\tag{11}$$

$$\eta(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y), y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))=(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x, y)\tag{12}$$

故由(11),(12) 式可得

$$\begin{aligned}&y^*+\gamma\alpha(x^*, y^*)\eta(x^*, y^*)=\\&y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)+\gamma\alpha(y+\lambda_1\eta(x, y), y+\lambda_2\eta(x, y))\eta(y+\lambda_2\eta(x, y), y+\lambda_1\eta(x, y))=\\&y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)+\gamma(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(x, y)\eta(x, y)\end{aligned}$$

从而对 $\forall\beta\in(0, 1)$，由于 $\lambda_1<\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2<\lambda_2$，由 λ_1, λ_2 的取法知，

$$\begin{aligned}&f(y*+\beta\alpha(x*, y*)\eta(x*, y*))=\\&f[y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)+\beta(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(x, y)\eta(x, y)]=\\&f[y+(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)\alpha(x, y)\eta(x, y)]>\\&(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)f(x)+[1-(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)]f(y)=\\&\beta[\lambda_1 f(x)+(1-\lambda_1)f(y)]+(1-\beta)[\lambda_2 f(x)+(1-\lambda_2)f(y)]=\\&\beta f(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y))+(1-\beta)f(y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))=\end{aligned}$$

$$\beta f(x^*)+(1-\beta)f(y^*)$$

这与题设条件相矛盾，故假设不成立，即 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数.

定理 2 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，f 下半连续且满足条件 B，则 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数等价于 $\exists \lambda \in (0, 1)$，对 $\forall x, y \in K$，有

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant (1-\lambda)f(y)+\lambda f(x)$$

证 必要性可直接由 α-预不变凸函数的定义得到，只需证明充分性. 令

$$A=\{\lambda \in [0, 1]: f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in K\}$$

如果 $\lambda_n \in A$，且 $\lambda_n \to \lambda (n \to \infty)$，则由 A 的定义，对 $\forall x, y \in X$，有

$$f(y+\lambda_n\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y)$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty} f(y+\lambda_n\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \liminf_{n\to\infty}(\lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y))$$

因为 f 下半连续，所以

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

由条件 B，当 $\lambda=0,1$，同样有

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从而 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数.

注 1 定理 1 和定理 2 说明在上半连续或下半连续条件下，判断一个函数是不是 α-预不变凸函数，可减弱为判断其中值点是否满足 α-预不变凸性.

注 2 定理 1 和定理 2 只要求 K 是 α-不变凸集，与文献[6]定理 3.1 和定理 3.2 相比，既排除了 A 是开集的要求，同时定理 2 也排除了条件 A，证明过程中也没用到集合 A 的稠密性，从而在一定程度上简化了证明过程.

定理 3 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件 $\alpha(x, y)=\alpha(y, y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))$，$f$ 满足条件 B，则 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数等价于对于 $\forall x, y \in K$，$\lambda \in [0, 1]$，$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))$ 是 $[0, 1]$ 上的凸函数.

证 若 $g(\lambda)$ 是凸函数，则对于 $\forall x, y \in K$，$\lambda \in [0, 1]$，有

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0) \leqslant \lambda g(1)+(1-\lambda)g(0)=$$
$$\lambda f(y+\alpha(x, y)\eta(x, y))+(1-\lambda)f(y)$$

因为 f 满足条件 B，所以

$$\lambda f(y+\alpha(x, y)\eta(x, y))+(1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从而

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

故 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数.

反之，设 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数，则 $\exists \lambda \in (0, 1)$，对 $\forall x, y \in K$ 有

$$f(y+\lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

对 $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in [0, 1]$，

(a) 若 $\lambda_1=\lambda_2$，则有

$$g(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))=g(\lambda_2)=f(y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))=\lambda g(\lambda_1)+(1-\lambda)g(\lambda_2)$$

(b) 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，不失一般性，可假设 $\lambda_1>\lambda_2$. 由于 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$，可知 $\lambda_2 \neq 1$，故 $0<\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2} \leqslant 1$. 则由(11)，(12)式及 α-预不变凸函数的定义，有

$$g(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))=f(y+(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))\alpha(x, y)\eta(x, y))=$$
$$f(y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)+\lambda(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(x, y)\eta(x, y))=$$
$$f(y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)+\lambda\alpha(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y), y+$$
$$\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y))\eta(y+\lambda_1\alpha(x, y)\eta(x, y), y+\lambda_2\alpha(x, y)\eta(x, y)) \leqslant$$

$$\lambda f(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=$$
$$\lambda g(\lambda_1)+(1-\lambda)g(\lambda_2)$$

故 $g(\lambda)$ 是$[0,1]$上的凸函数.

定理 4　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

f 满足条件 B，则 f 关于相同的 η 和 α 是严格 α-预不变凸函数等价于对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$ 是$[0,1]$上的严格凸函数.

证　若 $g(\lambda)$ 是严格凸函数，则对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，当 $x\neq y$ 时，有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)<\lambda g(1)+(1-\lambda)g(0)=$$
$$\lambda f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y)$$

因为 f 满足条件 B，所以

$$\lambda f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从而

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

故 f 关于相同的 η 和 α 是严格 α-预不变凸函数.

反之，设 f 关于相同的 η 和 α 是严格 α-预不变凸函数，则 $\exists\lambda\in(0,1)$，对 $\forall x,y\in K$，当 $x\neq y$ 时，有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

对 $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda\in[0,1]$，

(a) 若 $\lambda_1=\lambda_2$，则有

$$g(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))=g(\lambda_2)=f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=\lambda g(\lambda_1)+(1-\lambda)g(\lambda_2)$$

(b) 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$，不失一般性，可假设 $\lambda_1>\lambda_2$. 由于 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，可知 $\lambda_2\neq 1$，故

$$0<\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}\leqslant 1$$

而且对 $\forall x,y\in K$，当 $x\neq y$ 时，有 $\eta(x,y)\neq 0$，又由 $\alpha(x,y)\neq 0$ 和 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则有

$$y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y)\neq y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y)$$

从而由(11)，(12) 式及严格 α-预不变凸函数的定义，有

$$g(\gamma_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))=f(y+(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))\alpha(x,y)\eta(x,y))=$$
$$f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\lambda(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(x,y)\eta(x,y))=$$
$$f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\lambda\alpha(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+$$
$$\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))<$$
$$\lambda f(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=$$
$$\lambda g(\lambda_1)+(1-\lambda)g(\lambda_2)$$

故 $g(\lambda)$ 是$[0,1]$上的严格凸函数.

定理 5　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

f 满足条件 B，则 f 关于相同的 η 和 α 是半严格 α-预不变凸函数等价于对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$ 是$[0,1]$上的半严格凸函数.

证　若 $g(\lambda)$ 是半严格凸函数，则对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，当 $g(x)\neq g(y)$ 时，有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=g(\lambda)=g(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)<\lambda g(1)+(1-\lambda)g(0)=$$
$$\lambda f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y)$$

因为 f 满足条件 B，所以

$$\lambda f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

从而

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

故 f 关于相同的 η 和 α 是半严格 α-预不变凸函数.

反之，设 f 关于相同的 η 和 α 是半严格 α-预不变凸函数，则 $\exists\lambda\in(0,1)$，对 $\forall x,y\in K$，当 $f(x)\neq f(y)$ 时，有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

对 $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda\in[0,1]$，若 $g(\lambda_1)\neq g(\lambda_2)$，则有

$$f(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y))\neq f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

及 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 不失一般性，可假设 $\lambda_1>\lambda_2$，则

$$0<\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}\leqslant 1$$

从而由(11),(12)式及半严格 α-预不变凸函数的定义，有

$$\begin{aligned}g(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))=&f(y+(\lambda_2+\lambda(\lambda_1-\lambda_2))\alpha(x,y)\eta(x,y))=\\&f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\lambda(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(x,y)\eta(x,y))=\\&f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\lambda\alpha(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\\&\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))<\\&\lambda f(y+\lambda_1\alpha(x,y)\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\lambda_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=\\&\lambda g(\lambda_1)+(1-\lambda)g(\lambda_2)\end{aligned}$$

故 $g(\lambda)$ 是$[0,1]$上的半严格凸函数.

考虑到凸函数必是拟凸函数、严格凸函数必是严格拟凸函数、半严格凸函数必是半严格拟凸函数，反之不一定成立，从而由定理 3、定理 4 和定理 5 立即可得到下面的推论.

推论 1 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

f 满足条件 B，如果 f 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数，则对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，

$$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

是$[0,1]$上的拟凸函数.

推论 2 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

f 满足条件 B，如果 f 关于相同的 η 和 α 是严格 α-预不变凸函数，则对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，

$$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

是$[0,1]$上的严格拟凸函数.

推论 3 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 A，α 满足条件

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

f 满足条件 B，如果 f 关于相同的 η 和 α 是半严格 α-预不变凸函数，则对于 $\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，

$$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

是$[0,1]$上的半严格拟凸函数.

参考文献：

[1] WEIR T, MOND B. Prieinvex Functions in Multiple Objective Optimization [J]. Journal of Math Anal and Appl, 1988, 136: 29－38.

[2] WEIR T, JEYAKWMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming [J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1988, 38(2): 177－189.

[3] YANG X M, LI D. Semistrictly Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258: 287－308.

[4] NOOR M A, NOOR K I. Some Characterizations of Strongly Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 316(2): 697－706.

[5] ROBERTS A W，VARBERG D E. Convex Functions [M]. New York：Acdemic Press，1973.
[6] YANG X M，LI D. On Properties of Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，256(1)：229－241.
[7] AVRIEL M，DIEWERT W E，SCHAIBLE S S，et al. Generalized Concavity [M]. New York：Penum Press，1988.
[8] 赵克全. 预不变凸函数的一个等价条件 [J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(3)：6－8.
[9] 赵克全，刘学文，陈　哲. 关于预不变拟凸函数的一些特征 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(7)：30－33.
[10] 赵克全，郭　辉. 预不变凸性判别准则的新证明 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(8)：119－121.
[11] YANG X M. Semistrictly Convex Functions [J]. Opsearch，1994，31(1)：15－27.
[12] BAZARAA M S，SHETTY C M. Nonlinear Programming：Theory and Algorithms [M]. New York：John Wiley and Sons，1979.
[13] NOOR M A. On Generalized Preinvex Functions and Monotonicities [J]. Journal of Inequality Pure Applied Mathematics，2004，5(4)：1－9.
[14] LIU C P. Some Characterizations and Applications on Strongly α-preinvex and Strongly α-Invex Functions [J]. Journal of Industrial and Management Optimization，2008，4(4)：727－738.

Some Properties of α-Preinvex Functions

WANG Hai-ying，　FU Zu-feng，　HE　Zhi

Department of mathematics and physics，Anshun College，Anshun Guizhou 561000，China

Abstract：A class of generalized convex functions，termed α-preinvex functions，is considered in this paper. Some properties of the α-preinvex functions are discussed. In particular，the relationship between semicontinuous functions and α-preinvex functions are investigated with the α-preinvexity of the midpoint. These results provide methods for discriminating α-preinvexity.

Key words：α-preinvex function；upper semicontinuous；lower semicontinuous

责任编辑　张　枸