第 37 卷第 4 期　西南大学学报(自然科学版)　2015 年 4 月
Vol. 37 No. 4　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Apr. 2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.04.003

关于“好群”①

郭继东[1]，　任永才[2]，　张志让[3]

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000；2. 四川大学 数学学院，成都 610064；
3. 成都信息工程学院 数学学院，成都 610225

摘要：令 ω 是由有限个正整数组成的集合. 如果 $1 \in \omega$，且当 $s \in \omega$ 时，s 的每个正因子 $t \in \omega$，则称 ω 是合理子集. 用 $\pi_e(K)$ 表示由有限群 K 的元素的阶组成的集合. 如果对于 $\pi_e(G)$ 的每个合理子集 ω，都存在一个有限群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$，则称有限群 G 是好群；如果对于 $\pi_e(G)$ 的每个合理子集 ω，都存在 G 的子群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$，则称有限群 G 是强好群. 主要确定了某些好群和强好群.

关　键　词：有限群；合理子集；好群；强好群；元素的阶

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2015)04-0017-06

本文中的群都是指有限群. 字母 G 总是代表一个群. 字母 p 和 q 总是代表两个不同的素数. C_n 代表 n 阶循环群，A_n 代表 n 次交错群，S_n 代表 n 次对称群. 我们用 $\mathrm{Syl}_p(G)$ 表示群 G 的全体 Sylow p-子群组成的集合，用 $\pi(G)$ 表示由群 G 的阶 $|G|$ 的全体素因子组成的集合，用 $\pi_e(G)$ 表示由群 G 中的全体元素的阶组成的集合. 文中其它符号都是标准的(参见文献[1]).

令 ω 是由有限个正整数组成的集合. 如果 $1 \in \omega$，且当 $s \in \omega$ 时，s 的每个正因子 $t \in \omega$，则称 ω 是合理子集. 如果合理子集 ω 是 $\pi_e(G)$ 的子集，则称 ω 是 $\pi_e(G)$ 的合理子集.

如果对于 $\pi_e(G)$ 的合理子集 ω，存在群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$，则称群 G 是好群(见文献[2]). 在本文中，我们引入强好群的概念：如果对于 $\pi_e(G)$ 的合理子集 ω，存在 G 的子群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$，则称群 G 是强好群. 本文主要目的是确定某些好群和强好群.

引理 1[3]　如果 $|\pi(G)| \geqslant 3$，且 G 中每个非单位元的阶是素数，则 $G \cong A_5$. 特别地，$\pi(G)=\{2, 3, 5\}$.

引理 2[4] 495-507　设 G 是以 K 为核，以 H 为补的 Frobenius 群，则下述各个命题成立：

(1°) $G=KH$，$K \lhd G$，$|G|=|K||H|$，$(|K|, |H|)=1$，$|H| \mid (|K|-1)$；

(2°) $C_K(h)=1$ ($\forall 1 \neq h \in H$)；

(3°) 如果 $|H|$ 是偶数，则 H 中恰有一个 2 阶元素 t，且 $t^{-1}xt=x^{-1}$ ($\forall x \in K$)，特别地，K 是 Abel 群；

(4°) H 的 Sylow 子群要么是循环群，要么是广义四元数群；

(5°) $G=K \cup (\bigcup\limits_{x \in G-H} (H-1)^x)$.

引理 3[4] 497　设 $G=KH$，$K \lhd G$，$H<G$. 如果 H 中的每个非单位元按共轭导出 K 的一个无不动点自同构，则 G 是以 K 为核，以 H 为补的 Frobenius 群.

---

① 收稿日期：2014-06-24
基金项目：新疆维吾尔自治区普通高等学校重点学科基金资助项目(2012ZDXK12)；国家自然科学基金(11471055).
作者简介：郭继东(1965-)，男，山东郓城人，教授，主要从事群论的研究.
通信作者：任永才，教授.

引理 4[4] 178 设 G 是 p^n 阶初等 Abel-p-群，p 是素数，则

$$|\mathrm{Aut}(G)|=p^{\frac{1}{2}n(n-1)}(p-1)\cdots(p^n-1)$$

定理 1 下述各个命题成立：

(1°) 设 G 是好群，如果 $|\pi(G)|\geqslant 3$，则 $\pi(G)=\{2,3,5\}$；

(2°) 如果 G 是非可解的好群，则 $\pi(G)=\{2,3,5\}$；

(3°) 最小阶的非可解好群是 A_5；

(4°) 设 G 是强好群，如果 $|\pi(G)|\geqslant 3$，则 $A_5\leqslant G$，G 是非可解的，且 $\pi(G)=\{2,3,5\}$；

(5°) $C_p\times C_q$ 是强好群；

(6°) 设 $p>q$，存在 pq 阶非 Abel 群的充要条件是 $q\mid(p-1)$. pq 阶群是强好群.

证 (1°) 由文献[2]中的定理 1 可得.

(2°) 由于 G 是非可解的，据 Bunside$\{p,q\}$-定理[4] 492，我们有 $|\pi(G)|\geqslant 3$. 于是，由于 G 是好群，据(1°)得到 $\pi(G)=\{2,3,5\}$.

(3°) 最小阶的非可解群是 A_5[5] 106，而 A_5 是好群，故(3°)成立.

(4°) 据题设，我们有 $\pi(G)=\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n\}$，其中 p_i 是不同的素数，$3\leqslant n$. $\{1,p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n\}$ 是 $\pi_e(G)$ 的一个合理子集. 于是，由于 G 是强好群，G 存在子群 K，使得

$$\pi_e(K)=\{1,p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n\}$$

据引理 1，我们有 $K\cong A_5$，从而 $n=3$，$\pi(G)=\{2,3,5\}$. 由于 G 含非 Abel 的单群 $K\cong A_5$，G 是非可解的. 这完成了(4°)的证明.

(5°) 显然成立.

(6°) 设 G 是 pq 阶群，那么 $\pi_e(G)=\{1,p,q\}$ 或 $\pi_e(G)=\{1,p,q,pq\}$. 从而 G 显然是强好群.

定理 2 下述各命题成立：

(1°) 好群的子群是好群；

(2°) 好群的商群是好群；

(3°) 非可解的好群的非 Abel 主因子同构于 A_5 或 A_6.

证 令 H 是 G 的子群或商群. 我们有 $\pi_e(H)\subseteq\pi_e(G)$，而 $\pi_e(H)$ 的合理子集显然也是 $\pi_e(G)$ 的合理子集. 这两个事实意味着(1°)和(2°)成立. 据文献[2]知：如果一个好群是非 Abel 单群，则这个好群同构于 A_5 或 A_6. 所以，据(1°)和(2°)知(3°)成立.

定理 3 下述各命题成立：

(1°) A_3, S_3, A_4 和 S_4 都是强好群，A_5, S_5, A_6 和 S_6 都是好群但都不是强好群；

(2°) A_n 是好群当且仅当 $n\leqslant 6$，S_n 是好群当且仅当 $n<6$；

(3°) A_n 是强好群当且仅当 $n\leqslant 4$，S_n 是强好群当且仅当 $n\leqslant 4$.

证 (1°) A_3, S_3 和 A_4 显然都是强好群. 我们有 $\pi_e(S_4)=\{1,2,3,4\}$. $\pi_e(S_4)$ 的合理子集 ω 是下述集之一：$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$. 对于 $\pi_e(S_4)$ 的每个合理子集 ω，都有 S_4 的子群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$，例如：设 $\omega=\{1,2,3\}$，我们有 S_4 的子群 $H=A_4$，使得 $\pi_e(H)=\pi_e(A_4)=\{1,2,3\}=\omega$. 设 $\omega=\{1,2,4\}$，S_4 的 Sylow 2-子群是 8 阶二面体群 D_8，我们有 $\pi_e(D_8)=\{1,2,4\}=\omega$. 所以 S_4 是强好群.

$\pi_e(S_6)=\{1,2,3,4,5,6\}$. $\pi_e(S_6)$ 的合理子集 ω 是下述集之一：$\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,4,6\}$, $\{1,2,3,5,6\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$.

设 $\omega=\{1,2,5\}$，据定理 1，存在群 H，使得 $\pi_e(H)=\{1,2,5\}=\omega$.

设 $\omega=\{1,3,5\}$，据引理 4 和引理 3，存在以 5^2 阶初等 Abel 5-群为核，以一个 3 阶群为补的 Frobenius 群 H，据引理 2，我们有

$$\pi_e(H)=\{1,3,5\}=\omega$$

设 $\omega=\{1,2,4,5\}$. 令 H 是一个 5 阶群被它的自同构群(4 阶循环群)的扩张，据引理 3 和引理 2，我们有

$$\pi_e(H)=\{1,2,4,5\}=\omega$$

设 $\omega=\{1,2,3,5,6\}$. 5^2 阶初等 Abel-5-群的自同构群有一个子群是 6 阶循环群[4] 187，从而据引理 3，存在以一个 5^2 阶初等 Abel 群为核，以一个 6 阶循环群为补的 Frobenius 群 H，据引理 2 我们有

$$\pi_e(H)=\{1,2,3,5,6\}=\omega$$

设 $\omega=\{1,2,3,4,6\}$. 8 阶四元数群的自同构群是 S_4[6] 415，从而存在群 H，使得 H 是 8 阶四元数群被一个 3 阶群的扩张. 我们有

$$\pi_e(H)=\{1,2,3,4,6\}=\omega$$

当 ω 是 $\pi_e(S_6)$ 的其它合理子集时，显然存在群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$.

综上所述，对于 $\pi_e(S_6)$ 的任一个合理子集 ω，存在群 H，使得 $\pi_e(H)=\omega$. 所以 S_6 是好群.

不存在 S_6 的子群 H，使得 $\pi_e(H)=\{1,3,5\}$，否则 $|H|=3^2\cdot 5$ 或 $3\cdot 5$. 但 S_6 既无 $3^2\cdot 5$ 阶子群也无 $3\cdot 5$ 阶子群，矛盾. 所以 S_6 不是强好群.

由于 S_6 是好群，A_5,S_5 和 A_6 都是好群(见定理 2)，用上一段推理知 A_5,S_5 和 A_6 都不是强好群.

由(1°)和定理 1(1°)，得到(2°)和(3°). 证毕.

推论 1 设 n 是 $\pi_e(G)$ 中最大的数. 如果 $n\leqslant 6$，则 G 是好群；如果 $n\leqslant 4$，则 G 是强好群.

定理 4 设 G 是以一个 Abel-p-群 P 为核，以一个 q-群 Q 为补的 Frobenius 群，则 G 是强好群.

证 我们有 $|Q|=q^n$，其中 n 是某个正整数. Q 要么是 q^n 阶循环群，要么是 2^n 阶广义四元数群(见引理 2). 设 $\exp(P)=p^m$. 于是，我们有

$$\pi_e(P)=\{1,p,\cdots,p^m\}$$

(Ⅰ) 设 Q 是 q^n 阶循环群.

据引理 2，我们有

$$\pi_e(G)=\{1,p,\cdots,p^m,q,\cdots,q^n\}$$

显然，$\pi_e(G)$ 的合理子集分别是：$\{1\}$,$\{1,p,\cdots,p^i\}$,$\{1,q,\cdots,q^j\}$,$\{1,p,\cdots,p^i,q,\cdots,q^j\}$，其中 $i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$.

令

$$\Omega_i(P)=\{x\mid x^{p^i}=1\}\qquad i=1,\cdots,m$$

$\Omega_i(P)$ 是 P 的特征子群，由于 $P\lhd G$，我们有 $\Omega_i(P)\lhd G$. 我们有

$$\exp(\Omega_i(P))=p^i$$

记 Q 的 q^j 阶循环子群为 $Q_j(j=1,\cdots,n)$. 令 $G_{ij}=\Omega_i(P)Q_j$，并规定 $\Omega_0(P)=1$ 及 $Q_0=1$.

我们有：

$$\pi_e(\Omega_i(P))=\{1,p,\cdots,p^i\}\qquad i=1,\cdots,m$$

$$\pi_e(Q_j)=\{1,q,\cdots,q^j\}\qquad j=1,\cdots,n$$

据引理 2 和引理 3 知道：对于 $i,j\geqslant 1$，G_{ij} 是以 $\Omega_i(P)$ 为核，以 Q_j 为补的 Frobenius 群，

$$\pi_e(G_{ij})=\{1,p,\cdots,p^i,q,\cdots,q^j\}$$

综上所述，对于 $\pi_e(G)$ 的任一个合理子集 ω，都有 G 的子群 K，使得 $\pi_e(K)=\omega$. 所以 G 是强好群.

(Ⅱ) 设 Q 是 2^n 阶广义四元数群.

这时，Q 有一个 2^{n-1} 阶循环子群，$\pi_e(Q)=\{1,2,\cdots,2^{n-1}\}$. 据引理 2 我们有

$$\pi_e(G)=\{1,p,\cdots,p^m,2,\cdots,2^{n-1}\}$$

Q 有 2^i 阶循环子群 $Q_i(i=1,\cdots,n-1)$. 重复(Ⅰ)中的推理可知 G 是强好群，证毕.

如果群 G 中的每个非单位元的阶是素数的幂，则称 G 是 EOPP-群. 下述定理 5 是文献[7]213 页中的 E16.3(无证明)的精细和改进，这可利用文献[8]中的结果证明(证明从略).

定理5　设G是一个可解非幂零的EOPP-群，则$\pi(G)=\{p, q\}$，$G=PQ$，其中$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，且$F(G)=O_p(G)$或$F(G)=O_q(G)$. 不妨设$F(G)=O_p(G)$，则下述3个命题成立：

(1°) 如果$P=F(G)$，则G是以P为核，以Q为补的Frobenius群，Q是循环群或广义四元数群；

(2°) 如果$P>F(G)$，则下述各命题成立：

(2°a) G是2-Frobenius群. 更确切地说，$G=P_1QP_2$，其中$P_1=F(G)=O_p(G)$，$P_1P_2=P$，$P_1\cap P_2=\{1\}$，P_2是循环群. P_1Q是以$P_1=F(G)$为核，以Q为补的Frobenius群，QP_2是以Q为核，以P_2为补的Frobenius群；

(2°b) $q=pk+1$，k是某个正整数(特别地，$q\neq 2$)；

(2°c) Q是循环群；

(2°d) 对于(2°a)中的P_2，有$|P_2|\neq p$.

(3°) 如果$q<p$，特别地，如果$q=2$，则G是以P为核，以Q为补的Frobenius群，Q是循环群或广义四元数群.

反之，设$|\pi(G)|=2$，且设G是Frobenius群或2-Frobenius群，则G是可解非幂零的EOPP-群.

定理6　设G是一个偶数阶的可解非幂零的EOPP-群. 令$S\in \mathrm{Syl}_2(G)$. 如果S是Abel的，则G是强好群，并且下述命题之一成立：

(1°) G是以一个Abel-p-群为核，以循环2-群S为补的Frobenius群；

(2°) G是以一个Abel-2-群S为核，以一个循环p-群为补的Frobenius群.

证　据题设和定理5，我们有$\pi(G)=\{2, p\}(p\neq 2)$，$G=PS$，其中$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$S\in \mathrm{Syl}_2(G)$，且$F(G)=O_p(G)$或$F(G)=O_2(G)$. 如果$F(G)=O_p(G)$，则据定理5和题设知，G是以P为核，以S为补的Frobenius群，S是循环群2-群，(1°)成立. 从而据定理4知G是强好群.

现在设$F(G)=O_2(G)$. 由于S是Abel的，据文献[4]277页的定理4.2，我们有

$$S\leqslant C_G(O_2(G))=C_G(F(G))\leqslant F(G)=O_2(G)\leqslant S\Rightarrow S=F(G)$$

所以，据定理5知G是以Abel-2-群S为核，以一个循环p-群P为补的Frobenius群，(2°)成立. 从而据定理4知G是强好群.

下述定理7是定理6的直接推论.

定理7　设G是一个偶数阶的可解非幂零的EOPP-群，且G中的每个2-元都是对合，则G是强好群，并且下述命题之一成立：

(1°) G是以一个初等Abel-2-群为核，以一个循环p-群为补的Frobenius群；

(2°) G是以一个Abel-p-群为核，以一个2阶群为补的Frobenius群.

定理8　设G是一个偶数阶的可解非幂零的EOPP-群，且设G的Sylow 2-子群是广义四元数群，则G是强好群，并且G是以一个Abel-p-群为核，以一个广义四元数群为补的Frobenius群.

证　令$S\in \mathrm{Syl}_2(G)$. 据定理5，我们有$G=PS$，其中$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，p是奇素数. 由于S是广义四元数群，据文献[9]的定理2.3知$P\lhd G$. 于是，据定理5知G是以P为核，以广义四元数群S为补的Frobenius群. 从而，P是Abel的(见引理2). 于是，由定理4知G是强好群.

据定理5不难证明下述引理5成立.

引理5　设$\pi_e(G)=\{1, 2, \cdots, 2^n, 3\}$，其中$n$是正整数且$n\geqslant 2$，则下述命题之一成立：

(1°) G是以一个2-群为核，以一个3阶群为补的Frobenius群，此外，核的阶是2^{2k}，其中k是某个正整数；

(2°) G是以一个初等Abel-3-群为核，以一个2^n阶循环群或2^{n+1}阶广义四元数群为补的Frobenius群，令P是核，令t是补中的2^n阶元，则$x^{t^{2n-1}}=x^{-1}(\forall x\in P)$；

(3°) $G=F(G)S_3$，$|F(G)|=2^{2k}$，k是某个正整数，$\exp(F(G))$是2^n的因子，$F(G)$的类不大于2.

据引理5、定理3和定理4，得到定理9：

定理 9　设 G 有 8 阶的 Sylow 2 -子群，且 $\pi_e(G)=\{1, 2, \cdots, 2^n, 3\}$，其中 n 是正整数，且 $n>2$. 那么，G 是强好群，并且下述命题之一成立：

(1°) G 是以一个初等 Abel-3 -群为核，以一个 8 阶循环群或一个 8 阶四元数群为补的 Frobenius 群；

(2°) $G\cong S_4$.

定理 10　设 G 有 2^4 阶的 Sylow 2 -子群，且 $\pi_e(G)=\{1, 2, \cdots, 2^n, 3\}$，其中 n 是正整数且 $n\geqslant 2$. 那么，G 是强好群，并且下述命题之一成立：

(1°) G 是以两个 4 阶循环群的直积(即 2^4 阶非循环的 haicycl 群) 为核，以一个 3 阶群为补的 Frobenius 群；

(2°) G 是以一个初等 Abel-3 -群为核，以一个 2^4 阶循环群或 2^4 阶广义四元数群为补的 Frobenius 群.

证　由于 G 有 2^4 阶的 Sylow 2 -子群，据引理 5 知 G 是引理 5 的(1°) 或(2°) 中的群.

如果 G 是引理 5(2°) 中的群，则本定理陈述中的(2°) 成立. 从而据定理 4 知 G 是强好群.

现在设 G 是引理 5(1°) 中的群，即 G 是以一个 2^4 阶群 Q 为核，以一个 3 阶群 H 为补的 Frobenius 群.

假设 Q 不是 Abel 的，我们有 $4\leqslant |Q'|$. 于是，由 p -群的一个基本结果知 $|Q'|=4$，$|Q/Q'|=4$. 从而，据文献[10]194 页的定理 4.5 知 Q 是下述群之一：Q_{2^4}(2^4 阶广义四元数群)，D_{2^4}(2^4 阶二面体群)，S_{2^4}(2^4 阶半二面体群). 于是，Q' 是 2^2 阶循环群(见文献[10]191 页的定理 4.3). 由于 $Q\lhd G$，$Q'\lhd G$，从而 $Q'H$ 是 G 的子群. 由于 Q' 是循环 2 -群，$H\lhd Q'H$，$Q'H=Q'\times H$，与 G 的 EOPP 性质矛盾. 所以，Q 是 2^4 阶 Abel 群. Q 不能是循环群(否则，$|\mathrm{Aut}(Q)|=2^3$，但这不可能). 于是 $4\leqslant|\Omega_1(Q)|$. 由题设($n\geqslant 2$) 知 Q 不能为初等 Abel 群. 所以，我们有 $2^2\leqslant|\Omega_1(Q)|\leqslant 2^3$. 所以(如果有必要的话，考虑 EOPP -群 $G/\Omega_1(G)$(EOPP -群的商群是 EOPP -群)) 我们断定：$|\Omega_1(Q)|=2^2$，Q 是两个 4 阶循环群的直积. 于是，定理陈述中的(1°) 成立. 从而据定理 4 知 G 是强好群.

定理 11　设 G 是 2^3p 阶 EOPP -群($p\neq 2$)，则 G 是强好群，并且下述命题之一成立：

(1°) G 是以一个 p 阶群为核，以一个 2^3 阶循环群为补的 Frobenius 群，且 $2^3\mid p-1$；

(2°) G 是以一个 2^3 阶初等 Abel 群为核，以一个 7 阶群为补的 Frobenius 群；

(3°) $G\cong S_4$.

证　令 $S\in \mathrm{Syl}_2(G)$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. G 是可解的. 据题设我们有 $|F(G)|=4,8,p$.

(Ⅰ) $|F(G)|=p$.

这时，据定理 5 知(1°) 成立. 于是，据定理 4 知 G 是强好群.

(Ⅱ) $|F(G)|=8$.

这时，$|F(G)|=S$，据定理 5 知 G 是以 S 为核，以 P 为补的 Frobenius 群. 如果 S 不是 Abel 的，则 $|Z(S)|=2$，G 不是 EOPP -群，与题设矛盾. 所以，S 是 Abel 的. 于是，据引理 2(1°) 知(2°) 成立. 从而据定理 4 知 G 是强好群.

(Ⅲ) $|F(G)|=4$.

这时，据定理 5 知 $G\cong S_4$，即(3°) 成立. $G=S_4$ 是强好群(见定理 3).

定理 12　设 G 是非可解的 EOPP -群. 如果 G 是好群，则下述之一成立：

(1°) $G\cong A_5$；

(2°) $G\cong A_6$；

(3°) $G/P\cong A_5$，其中 P 是初等 Abel-2 -群，且同构于若干个自然模的直和.

证　由于 G 是非可解的 EOPP -群，据文献[11] 的定理 3，下述结论之一成立：

(a) G 是下述群之一：$\mathrm{PSL}(2, q)(q=4,7,8,9,17)$，$\mathrm{PSL}(3, 4)$，$Sz(8)$，$Sz(32)$；

(b) G 有非平凡的正规初等 Abel-2 -子群 P，P 同构于若干自然模的直和，且 G/P 与下述群之一同构：$\mathrm{PSL}(2, 4)$，$\mathrm{PSL}(2, 8)$，$Sz(8)$，$Sz(32)$；

(c) $G\cong M_{11}$.

由于 G 是好群，据定理 2 知下述之一成立：

(1°) $G \cong \mathrm{PSL}(2, 4) \cong A_5$;

(2°) $G \cong \mathrm{PSL}(2, 9) \cong A_6$;

(3°) $G/P \cong \mathrm{PSL}(2, 4) \cong A_5$，其中 P 是初等 Abel-2-群，且同构于若干个自然模的直和.

致谢：衷心感谢施武杰教授的帮助.

参考文献：

[1] ROSE H E. A Course on Finite Groups [M]. London: Springer-Verlag, 2009.

[2] 禄　鹏，曹洪平. 元的阶之集与群的性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2013，35(12)：59－62.

[3] 施武杰，杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1984，8(1)：36－40.

[4] HUPPET B. Endliche Gruppen I [M]. New York: Springer-Verlag, 1967.

[5] ROSE J S. A Course On Group Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

[6] 张远达. 有限群构造(下册) [M]. 北京：科学出版社，1982.

[7] HUPPERT B. Character Theory of Finite Groups [M]. New York: Walter de Gruyter, 1998.

[8] HIGMAN G. Finite Groups in Which Every Element Has Prime Power Order [J]. J London Math Soc, 1957, 32: 335－342.

[9] 施武杰，杨文泽. 有限质幂元群 [J]. 云南教育学院学报：自然科学版，1986，2(1)：2－10.

[10] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York: Harper and Row, 1968.

[11] BRANDL R. Finite Groups all of Whose Elements are of Prime Power Order [J]. Bollettine U M L, 1981, 18(5): 491－493.

On "Good Groups"

GUO Ji-dong[1], REN Yong-cai[2], ZHANG Zhi-rang[3]

1. *College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;*
2. *School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;*
3. *School of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China*

Abstract: Let ω be a finite set of positive integers. ω is called a reasonable subset if it satisfies the following two conditions: $1 \in \omega$, and when $s \in \omega$, $t \in \omega$ for each positive factor t of s. For a finite group K, $\pi_e(K)$ denotes the set of the orders of the elements in K. A finite group G is called a good group if for a reasonable subset ω of $\pi_e(G)$, there is a finite group H such that $\pi_e(H)=\omega$. A finite group G is called a strong good group if for a reasonable subset ω of $\pi_e(G)$ there is a subgroup H of G such that $\pi_e(H)=\omega$. The main purpose of this paper is to determine some good groups and some strong good groups.

Key words: finite group; reasonable subset; good group; strong good group; the order of an element

责任编辑　廖　坤