

# 曲率的熵不等式的一种新证明<sup>①</sup>

马 磊<sup>1</sup>, 曾春娜<sup>2</sup>

1. 广东石油化工学院 高州师范学院, 数学系, 广东 茂名 525200;

2. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047

**摘要:** 研究了关于曲率的积分不等式, 利用纯分析的方法获得了一个不等式, 它的一个直接结果就是曲率的熵不等式, 并且证明了此不等式仅对圆成立.

**关键词:** 支持函数; 仿射等周不等式; 曲率; 曲率的熵不等式

**中图分类号:** O186.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2015)04-0027-03

几何与分析的结合使两门学科相得益彰. 用分析的方法来研究几何不等式已成为几何这门学科的一种重要手段. 正如文献[1]中所述: “一旦几何不等式被赋予了函数的翅膀, 它将焕发青春, 更具活力”. 2004 年, 文献[2]用纯分析的方法证明了仿射微分几何中著名的不等式——仿射等周不等式.

**仿射等周不等式**<sup>[2]</sup> 设  $K$  为  $\mathbb{R}^2$  中面积为  $A$ , 仿射周长为  $\Omega$  的紧致闭凸集, 则

$$\Omega \leqslant 8\pi^2 A \quad (1)$$

等号成立当且仅当  $K$  为椭圆.

文献[2]利用凸集  $K$  的支持函数  $h$ , 把仿射等周不等式(1)等价地转化为如下分析形式的不等式:

$$4\pi^2 \int_0^{2\pi} h(h+h'')d\theta \geqslant \left( \int_0^{2\pi} (h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta \right)^3$$

等号成立当且仅当存在常数  $a, b > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), 使得

$$h(\theta) = a \sqrt{b^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^{-2} \sin^2(\theta - \alpha)}$$

文献[3]在研究曲率流时, 得到了一系列关于曲率积分的等周不等式, 这些不等式对人们理解平面曲线流的演化问题起着重要作用(参见文献[4-5]). 虽然文献[3]把得到的不等式叫作等周不等式, 并指出这些不等式对于圆时等号是成立的, 但是并没有指出等号成立的时候一定为圆. 本文将从纯分析的角度对文献[3]得到的曲率的熵不等式给出一种全新的证明, 并且此不等式当且仅当对圆时才能取得等号.

## 1 预备知识

在平面  $\mathbb{R}^2$  中凸集  $K$  的支持函数定义为: 任意选取坐标系  $xOy$ , 自原点  $O$  引射线  $OP$ , 作垂直于  $OP$  且与凸集  $K$  相交的任一直线  $G(p, \theta)$ , 集合  $\{p\}$  的上确界记为  $h$ , 即

$$h = \sup\{p: G(p, \theta) \cap K \neq \emptyset\}$$

由支持函数的定义可知,  $h(\theta)$  为  $\theta$  的单值函数且以  $2\pi$  为周期. 设  $K$  为平面上的闭凸区域, 则其边界周长  $L$  与面积  $A$  可表示为(参见文献[6-10]):

$$L = \int_0^{2\pi} (h + h'')d\theta = \int_0^{2\pi} h d\theta \quad (2)$$

① 收稿日期: 2014-08-22

基金项目: 国家自然科学基金天元基金资助项目(11326073); 广东石油化工学院高州师范学院教育科学十二五规划项目(2015GSKT01).

作者简介: 马 磊(1982-), 男, 河南鹿邑人, 讲师, 主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(h+h'') d\theta \quad (3)$$

若记平面上闭凸区域  $K$  的边界曲线为  $\partial K$ , 则  $\partial K$  的曲率半径为  $\rho = h + h'' > 0$ , 且其弧长微元为  $ds = (h + h'') d\theta$ ,  $\partial K$  的相对曲率为  $k = \frac{1}{h + h''}$  (参见文献[7]).

众所周知, 闭凸区域  $K$  的边界曲线  $\partial K$  的曲率半径为常数当且仅当  $\partial K$  为圆, 即当且仅当存在常数  $c > 0$ , 使得  $\rho = h + h'' = c$  时  $\partial K$  为圆. 根据二阶微分方程的解可知, 当且仅当存在常数  $a, b, c$ , 使得  $h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c$  时  $\partial K$  为圆.

## 2 曲率的熵不等式

下面的引理 1 为仿射微分几何中著名的仿射等周不等式(1)的分析形式, 对我们证明本文的结论起着重要的作用.

**引理 1**<sup>[2]</sup> 设  $K$  为  $\mathbb{R}^2$  中边界光滑的紧致闭凸区域, 其支持函数为  $h$  (即  $h$  是一个以  $2\pi$  为周期的  $C^2$  函数, 且满足  $h > 0, h + h'' > 0$ ), 则

$$4\pi^2 \int_0^{2\pi} h(h+h'') d\theta \geq \left( \int_0^{2\pi} (h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta \right)^3 \quad (4)$$

等号成立当且仅当存在常数  $a, b > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), 使得

$$h(\theta) = a \sqrt{b^2 \cos^2(\theta - \alpha) + b^{-2} \sin^2(\theta - \alpha)}$$

即等号成立当且仅当  $\partial K$  为椭圆.

**定理 1** 设  $K$  为  $\mathbb{R}^2$  中边界光滑的紧致闭凸区域, 其支持函数为  $h$  (即  $h$  是一个以  $2\pi$  为周期的  $C^2$  函数, 且满足  $h > 0, h + h'' > 0$ ), 则

$$\pi \log \frac{\int_0^{2\pi} h(h+h'') d\theta}{2\pi} \geq \int_0^{2\pi} \log(h+h'') d\theta \quad (5)$$

等号成立当且仅当存在常数  $a, b, c$ , 使得

$$h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c$$

即等号成立当且仅当  $\partial K$  为圆.

**证** 因为

$$\int_0^{2\pi} \log(h+h'') d\theta = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \log(h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta \quad (6)$$

令  $f(t) = \log t$ , 易知  $f(t)$  为凹函数, 由 Jensen 不等式可知

$$\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \log(h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta \leq 3\pi \log \frac{\int_0^{2\pi} (h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta}{2\pi} = \pi \log \left( \frac{\int_0^{2\pi} (h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta}{2\pi} \right)^3 \quad (7)$$

又因  $f(t) = \log t$  为  $(0, +\infty)$  上的增函数, 由引理 1 的(4)式可知

$$\pi \log \left( \frac{\int_0^{2\pi} (h+h'')^{\frac{2}{3}} d\theta}{2\pi} \right)^3 \leq \pi \log \frac{\int_0^{2\pi} h(h+h'') d\theta}{2\pi} \quad (8)$$

由(6), (7), (8)式可知(5)式成立.

下面我们来证明等号成立的情形. 根据前面的证明过程可知, 当且仅当(7), (8)式同时取得等号时(5)式才能取得等号. 事实上, 由于  $f(t)$  为严格凹函数, 因此当且仅当  $h+h''$  为常数时(7)式为等号, 即当且仅当存在常数  $a, b, c$ , 使得  $h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c$  时(7)式取等号. 又因当  $h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c$  时, 易知(8)式可以取得等号(圆可以看成焦点重合了的椭圆). 因此(5)式等号成立当且仅当(7)式取等号, 即存在常数  $a, b, c$ , 使得  $h(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + c$ .

**定理 2**(曲率的熵不等式) 设  $K$  为  $\mathbb{R}^2$  中边界光滑的紧致闭凸区域, 则  $K$  的面积  $A$ , 以及边界曲线  $\partial K$  的相对曲率  $k$  满足不等式

$$\int_{\partial K} k \log(k) ds + \pi \log\left(\frac{A}{\pi}\right) \geq 0 \quad (9)$$

等号成立当且仅当  $\partial K$  为圆.

证 因为  $k = \frac{1}{h+h''}$ ,  $ds = (h+h'')d\theta$ , 则

$$\int_{\partial K} k \log(k) ds = - \int_0^{2\pi} \log(h+h'') d\theta$$

而由(3)式可知

$$\pi \log\left(\frac{A}{\pi}\right) = \pi \log \frac{\int_0^{2\pi} h(h+h'') d\theta}{2\pi}$$

结合不等式(5)可知(9)式成立, 故定理2得证.

## 参考文献:

- [1] KLARTAG B. Marginals of Geometric Inequalities [M]. Berlin: Springer, 2007: 133–166.
- [2] CHEN Wen-xiong, HOWARD R, LUTWAK E, et al. A Generalized Affine Isoperimetric Inequality [J]. Journal of Geometric Analysis, 2004, 14(4): 597–612.
- [3] GREEN M, OSHER S. Steiner Polynomials, Wulff Flows, and Some New Isoperimetric Inequalities for Convex Plane Curves [J]. Asian J math, 1999, 3(3): 659–676.
- [4] PAN Sheng-liang, YANG Jun-na. On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves [J]. Manuscripta Mathematica, 2008, 127(4): 469–484.
- [5] LIN Yu-chu, TSAI D H. Application of Andrews and Green-Osher Inequalities to Nonlocal Flow of Convex Plane Curves [J]. Journal of Evolution Equations, 2012, 12(4): 833–854.
- [6] SANTALÓ L A. Integral Geometry and Geometric Probability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [7] 任德麟. 积分几何学引论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [8] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [9] 马磊, 曾春娜. 关于曲率积分不等式的注记 [J]. 数学杂志, 2014, 34(5): 925–930.
- [10] 马磊, 曾春娜. 平面上加强的 Ros 不等式 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2014, 39(8): 23–25.

# A New Proof of the Entropy Inequality for Curvature

MA Lei<sup>1</sup>, ZENG Chun-na<sup>2</sup>

1. Department of Mathematics, Gaozhou Normal College, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong 525200, China;

2. College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China

**Abstract:** In this paper, we study an integral inequality for curvature. With purely analytic proof, an inequality is obtained, of which a direct consequence is the entropy inequality for curvature. We also prove that this equality holds only for circles.

**Key words:** support function; affine isoperimetric inequality; curvature; entropy inequality for curvature

责任编辑 廖坤

