

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.05.017

小样本 PP 检验统计量的分布特征^①

周 敏¹, 蔺富明²

1. 西南大学 财务处, 重庆 400715; 2. 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000

摘要: 用蒙特卡罗法研究了小样本容量 PP 检验统计量的分布特征与检验的临界值表并分析了小样本 PP 检验的功效.

关 键 词: 单位根; PP 检验; 蒙特卡罗

中图分类号: O212 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2015)05-0108-04

许多学者在研究宏观经济问题时使用了 DF 和 PP 检验, 得出许多宏观经济变量是单位根过程的结论^[1-5]. 许多学者研究了 DF 检验在小样本情形下的稳健性^[3, 6-7], 发现 DF 检验的功效很低, 极易导致伪检验(把平稳检验成非平稳). 样本容量过少可能就是造成伪检验结果的原因. 在小样本情形下研究 PP 检验功效是一个非常有意义的问题.

首先给出了 PP 检验统计量的表达式和极限分布, 其次给出小样本的模拟结果以及样本容量为 35 时的 PP 检验的功效, 最后部分给出结果分析.

1 PP 检验统计量及其极限分布

数据生成过程为

$$y_t = \alpha y_{t-1} + u_t \quad t = 1, 2, \dots \tag{1}$$

$$\alpha = 1 \tag{2}$$

初始值 y_0 可以是常数或随机变量. 随机变量的分布与样本容量无关. 新息序列 $\{u_t\}$ 满足:

- (i) $E(u_t) = 0$ 对所有的 t 成立;
- (ii) 对 $\epsilon > 0$ 和 $\beta > 2$, $\sup_t E |u_t|^{\beta+\epsilon} < \infty$;
- (iii) 定义 $S_t = u_1 + u_2 + \dots + u_t$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\sigma^2 = \lim E(T^{-1}S_T^2)$ 存在且 $\sigma^2 > 0$;
- (iv) $\{u_t\}$ 是强混合的, 混合参数 α_m 满足 $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1-2/\beta} < \infty$.

考虑以下回归模型

$$y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + u_t \tag{3}$$

此情形为文献[1]重点论述对象. 对于其它情形, 鉴于篇幅的关系, 本文从略. 由最小二乘法得到参数估计 $\hat{\mu}, \hat{\alpha}$, 进而构造下面的 PP 检验 Z 统计量:

① 收稿日期: 2014-11-03
基金项目: 四川省教育厅科研项目(12ZB082); 西南财经大学博士科研课题资助项目(JBK1207085); 四川理工学院培育项目(2013PY07); 中央高校基本业务费专项资金资助(SWU1509190); 重庆市科委自然科学基金项目(cstc2014jcyjA00010).
作者简介: 周 敏(1981-), 女, 重庆长寿人, 会计师, 主要从事财务管理研究.

$$Z(\hat{\alpha}) = T(\hat{\alpha} - 1) - \hat{\lambda}/\hat{m}_{yy} \quad Z(t_{\hat{\alpha}}) = (\hat{s}/\hat{\sigma}_{Tl})t_{\hat{\alpha}} - \hat{\lambda}'\hat{\sigma}_{Tl}/\hat{m}_{yy}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中

$$t_{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha} - \alpha) \left(\sum (y_{t-1} - T^{-1} \sum y_{t-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} / \hat{s} \quad \hat{m}_{yy} = T^{-2} \sum (y_t - T^{-1} \sum y_t)^2$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{Tl}^2 - \hat{s}^2) \quad \hat{\lambda}' = \hat{\lambda} / \hat{\sigma}_{Tl}^2 \quad \hat{s}^2 = (T-1)^{-1} \sum \hat{u}_t^2 = (T-1)^{-1} \sum (y_t - \hat{\mu} - \hat{\alpha} y_{t-1})^2$$

$$\hat{\sigma}_{Tl}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w_{sl} \sum_{t=s+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-s} \quad w_{sl} = 1 - s/(l+1)$$

当数据生成过程满足(1),(2)式,扰动项满足(i)–(iv)时,有下面的渐近分布

$$Z(\hat{\alpha}) \Rightarrow \int_0^1 W_*(t) dW(t) \left(\int_0^1 W_*^2(t) dt \right)^{-\frac{1}{2}} \quad Z(t_{\hat{\alpha}}) \Rightarrow \int_0^1 W_*(t) dW(t) \left(\int_0^1 W_*^2(t) dt \right)^{-\frac{1}{2}}$$

其中: $\{W(t)\}$ 为标准布朗运动, $W_*(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds$.

注意到上面的两个极限分布与 DF 检验中相应的极限分布是一样的,可以使用 DF 检验的临界值(见文献[1]附录 B5,6). 由于收敛速度的问题会造成有限样本分布与极限分布差异过大,造成 Size 的扭曲和检验功效的变化. 文献[2]给出了样本容量为 100 时, PP 检验使用 DF 统计量造成的 Size 扭曲的检验功效的变化. 在考虑有限样本分布时,需要估计扰动项的长期方差. 文献[2]使用 Parzen 窗口计算 w_{sl} 从而得到 $\hat{\sigma}_{Tl}^2$, 并发现 Size 扭曲、检验功效与窗口宽度选择、扰动项的设置关系密切. 本文进一步考虑在小样本(容量小于 55)时, PP 检验会产生的一些问题. 从 PP 检验统计量的构造来看,它使用了过多的估计来代替真实参数,因此小样本与大样本对检验效果的影响可能会非常显著.

2 蒙特卡罗模拟及结果分析

以模型(1)(其中 $\alpha = 1$) 为数据生成系统. 设定新息项 u_t 为 MA 过程即 $u_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$, 其中 $\epsilon_t \sim \text{IID}(0, 1)$. 设定 $y_0 = 0$. 则此时 y_t 为一个单整阶数为 1 的随机过程, 即 $y_t \sim I(1)$. 用 R 软件编程生成均值为 0, 方差为 1 的伪正态随机数 ϵ_t , 相加得到 u_t , 然后对其一阶累加得到 y_t , 每次舍弃前 100 个数据, 按一定样本容量生成数据. 将这列生成数据 $\{y_t\}$ 按回归模型(3) 用 OLS 估计法得到参数估计 $\hat{\alpha}, \hat{\mu}$, 使用(4) 式计算 PP 统计值. 本文将样本容量分为 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 这 10 种情形, 设定 $\theta = 0.5$, 使用非参估计法计算 $w_{sl} = 1 - s/(l+1)$ 时, l 选取为 2, 4. 在每个设定组合下, 模拟 4 000 次, 得到 4 000 个检验统计量 $Z(\hat{\alpha}), Z(t_{\hat{\alpha}})$ 的值. 据此得 $Z(\hat{\alpha}), Z(t_{\hat{\alpha}})$ 分布的 0.01, 0.05, 0.1 的分位数、均值、标准差、最大值、最小值、偏度. 模拟结果见表 1、表 2. 依据这些计算结果对 PP 检验统计量分布作出分析. 另外还对 PP 检验的功效作出模拟. 此时样本容量设定为 30, 模型(1)的参数 $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9$, 模拟次数为 2 000 次.

为了分析临界值与样本容量的关系, 将表 1 中每个统计量的每个 l 取值对应的 0.01, 0.05, 0.1 分位数、均值、标准差、偏度分别与样本容量的倒数求相关系数得表 3. 从表 1、表 3 可以发现 PP 两个统计量的分布均是左偏的, $Z(\hat{\alpha})$ 统计量的偏度随着样本容量增加而增加, 而 $Z(t_{\hat{\alpha}})$ 统计量的偏度随着样本容量增加而减小. $Z(\hat{\alpha})$ 统计量在 $l = 2$ 时各个样本容量下的各个临界值均小于其在 $l = 4$ 时的相应值, 但差异随着样本容量的增加有所减小, 这一趋势从 $Z(\hat{\alpha})$ 统计量的均值也能看到. $Z(\hat{\alpha})$ 统计量各个分位数随着样本容量的增加而减小, 这一点从其最大值、最小值和均值也可看到. $Z(t_{\hat{\alpha}})$ 统计量在 $l = 2$ 时各个样本容量下的各个临界值均大于其在 $l = 4$ 时的相应值. $Z(t_{\hat{\alpha}})$ 统计量在 $l = 2, 4$ 时, 任意分位数均随着样本容量增加而增大.

表 1 蒙特卡罗模拟结果

统计量	l	样本容量	百 分 数			最小值	最大值	均值	标准差	偏度
			1%	5%	10%					
$Z(\hat{\alpha})$	2	10	-10.31	-7.78	-6.43	-14.37	7.36	-2.77	2.83	-0.31
		15	-10.78	-8.27	-6.83	-13.63	6.71	-3.04	2.77	-0.49
		20	-11.56	-8.16	-6.77	-17.70	5.34	-3.12	2.83	-0.66
		25	-11.93	-8.31	-7.07	-19.45	4.83	-3.30	2.88	-0.80
		30	-11.85	-8.95	-7.34	-18.13	4.48	-3.43	2.92	-0.75
		35	-13.41	-9.68	-7.69	-19.52	4.10	-3.60	3.13	-0.98
		40	-13.30	-9.87	-8.01	-18.55	4.61	-3.84	3.15	-0.91
		45	-13.18	-9.47	-7.76	-21.24	4.13	-3.61	3.17	-0.92
		50	-13.45	-9.68	-7.99	-20.20	6.60	-3.81	3.18	-0.89
		55	-14.45	-9.95	-8.23	-19.41	3.62	-3.87	3.29	-0.96
	4	10	-9.70	-7.12	-5.78	-14.68	6.68	-2.49	2.66	-0.31
		15	-10.42	-7.57	-6.37	-18.35	7.80	-2.85	2.76	-0.52
		20	-10.55	-7.73	-6.43	-17.78	4.63	-3.08	2.69	-0.63
		25	-10.70	-8.20	-6.94	-15.93	6.94	-3.24	2.78	-0.36
		30	-10.81	-8.24	-7.13	-18.54	5.33	-3.37	2.83	-0.54
		35	-11.70	-8.95	-7.40	-16.97	5.17	-3.54	2.97	-0.64
		40	-12.40	-9.14	-7.69	-21.69	5.08	-3.69	2.96	-0.74
		45	-13.07	-9.75	-7.98	-17.34	4.00	-3.75	3.12	-0.80
		50	-12.87	-9.50	-8.09	-19.14	4.59	-3.81	3.14	-0.72
		55	-13.25	-10.10	-8.05	-23.09	5.34	-3.87	3.20	-0.85
$Z(t_{\hat{\alpha}})$	2	10	-43.59	-22.00	-15.06	-145.39	16.74	-5.546	9.93	-4.54
		15	-20.06	-10.32	-7.57	-56.61	22.55	-3.13	4.28	-3.12
		20	-14.65	-6.91	-4.98	-32.47	9.79	-2.41	3.05	-3.45
		25	-9.84	-5.55	-4.23	-39.26	4.18	-2.15	2.41	-4.57
		30	-8.18	-4.72	-3.82	-17.74	3.41	-1.98	1.75	-1.67
		35	-6.78	-4.64	-3.83	-11.07	2.91	-1.95	1.57	-0.85
		40	-7.01	-4.37	-3.73	-12.93	2.46	-1.98	1.52	-1.28
		45	-5.70	-4.31	-3.54	-12.35	3.14	-1.83	1.41	-0.59
		50	-5.67	-4.17	-3.58	-7.16	3.73	-1.88	1.34	-0.32
		55	-5.65	-4.09	-3.59	-8.57	2.41	-1.86	1.33	-0.35
	4	10	-52.90	-25.81	-16.41	-163.63	82.29	-5.98	11.84	-3.73
		15	-27.31	-11.66	-8.20	-79.28	18.80	-3.34	5.93	-4.48
		20	-13.73	-8.18	-5.71	-38.45	5.47	-2.47	3.04	-2.67
		25	-10.37	-6.08	-4.64	-22.05	7.38	-2.14	2.30	-1.98
		30	-8.52	-5.00	-3.80	-18.29	4.22	-1.96	1.87	-1.61
		35	-7.40	-4.85	-3.80	-14.10	3.17	-1.95	1.69	-1.16
		40	-6.57	-4.18	-3.53	-15.80	5.11	-1.91	1.47	-1.09
		45	-5.89	-4.08	-3.46	-8.95	3.83	-1.85	1.38	-0.35
		50	-5.94	-3.92	-3.45	-13.23	3.57	-1.84	1.37	-0.52
		55	-5.22	-4.01	-3.46	-8.73	4.34	-1.84	1.31	-0.25

表 2 PP 统计量检验功效

统计量	l	$\alpha=0.9$			$\alpha=0.8$			$\alpha=0.7$		
		0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1	0.01	0.05	0.1
$Z(\hat{\alpha})$	2	0.04	0.13	0.24	0.07	0.25	0.40	0.16	0.43	0.62
	4	0.02	0.13	0.22	0.05	0.24	0.37	0.10	0.40	0.57
$Z(t_{\hat{\alpha}})$	2	0	0.01	0.05	0	0.01	0.09	0	0.02	0.12
	4	0	0.01	0.04	0	0.01	0.04	0	0.01	0.05

表 3 表 1 中百分位数、均值、标准差、偏度与 1/T 间的相关系数

统计量	l	分 位 数			均值	标准差	偏度
		0.01	0.05	0.1			
$Z(\hat{\alpha})$	2	0.89	0.86	0.89	0.93	−0.79	0.96
	4	0.85	0.88	0.93	0.97	−0.81	0.79
$Z(t_{\hat{\alpha}})$	2	−0.97	−0.95	−0.94	−0.95	0.96	−0.80
	4	−0.97	−0.96	−0.96	−0.95	0.96	−0.89

分位数与样本容量的关系也可以从表 3 看出. 表 3 还提示我们临界值与样本容量的倒数可能存在较好的线性关系. 表 4 是响应面函数, 用它可以计算任意样本容量 $T \leq 55$ 时统计量的临界值. 从表 2 可以看到, PP 检验在小样本情形下的检验功效均不是很理想, 特别是 $Z(t_{\hat{\alpha}})$ 统计量的检验功效更低. 在实际检验中, 当样本容量 $T \leq 55$ 时, 要慎重地评价 PP 结果的可靠性.

表 4 临界值(CV)和 1/T 的回归函数

统计量	l	分位数	回 归 函 数	R^2	s. e.	F	DW
$Z(\hat{\alpha})$	2	0.01	$-14.293\ 6+46.330\ 1 \times 1/T$	0.81	0.62	33.48	1.33
		0.05	$-10.117\ 2+27.353\ 4 \times 1/T$	0.75	0.43	23.73	0.91
		0.1	$-8.274\ 3+21.347\ 5 \times 1/T$	0.80	0.28	33.07	0.88
	4	0.01	$-13.237\ 6+41.849\ 2 \times 1/T$	0.72	0.72	20.28	0.51
		0.05	$-10.016\ 3+34.316\ 7 \times 1/T$	0.78	0.50	28.02	0.82
		0.1	$-8.359\ 6+29.051\ 0 \times 1/T$	0.88	0.29	57.36	0.67
$Z(t_{\hat{\alpha}})$	2	0.01	$5.266\ 4-445.062\ 4 \times 1/T$	0.95	2.90	140.88	1.29
		0.05	$1.216\ 5-206.065\ 7 \times 1/T$	0.91	1.75	82.99	1.03
		0.1	$-0.036\ 2-132.593\ 2 \times 1/T$	0.89	1.21	71.21	0.91
	4	0.01	$8.534\ 6-567.351\ 4 \times 1/T$	0.95	3.65	144.58	0.72
		0.05	$2.457\ 7-253.351\ 1 \times 1/T$	0.93	1.93	102.61	1.18
		0.1	$0.480\ 6-151.659\ 0 \times 1/T$	0.93	1.17	100.08	1.00

参考文献:

[1] HAMILTON J D. Time Series Analysis [M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.
[2] PHILLIPS P C B, PERRON P. Testing for a Unit Root in Time Series Regression [J]. Biometrika, 1988, 175: 335—346.
[3] BLANGIEWICZ M, CHAREMZA W W. Cointegration in Small Samples: Empirical Percentiles, Drifting Moments and Customized Testing [J]. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 1990, 52(3): 303—315.
[4] 陈 龙. 结构性突变的单位根过程—基于中国广义货币的实证 [J]. 统计与决策, 2005(11): 12—13.
[5] 李志辉. 结构突变理论对外商直接投资的实证分析 [J]. 台声(新视角), 2005(12): 47—48.
[6] 姚耀军, 和丕禅. 农村资金外流的实证分析: 基于结构突变理论 [J]. 数量经济技术经济研究, 2004(8): 28—33.
[7] 张晓峒, 大川勉, 张世英. 小样本 DF 统计量的分布特征 [J]. 系统工程理论与实践, 1999(3): 31—37.

Distributional Characteristics of PP-Test Statistics on Small Samples

ZHOU Min¹, LIN Fu-ming²

1. Financial Department of Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. College of Science, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong Sichuan 643000, China

Abstract: PP test is an important type of tests for unit roots, which, combined with DF and ADF, constitutes the core method of unit root testing. However, there are few studies about the stability of PP tests in small sample cases. In this paper, we investigate PP distribution with a sample size no larger than 55 by Monte Carlo simulation and give a critical table for PP tests with a test level of 0.01, 0.05 or 0.1. Some analysis about the test power of PP statistics is provided.
Key words: unit root; PP test; Monte Carlo simulation

责任编辑 张 杓

