DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.06.010

带 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性①

刘海燕[1]，　廖家锋[1,2]，　唐春雷[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 遵义师范学院 数学与计算科学学院，贵州 遵义 563002

摘要：研究了一类带有加权 Hardy-Sobolev 临界指数、Dirichlet 边界条件和含超线性项的半线性椭圆方程

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}=\frac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u+f(x,u)$$

当一般项函数 $f(x,t)$ 和 a,b,μ 满足一定条件时，通过山路引理和强极大值原理得出该方程至少有一个正解.

关　键　词：Hardy-Sobolev 临界指数；山路引理；半线性椭圆方程

中图分类号：**O176.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2015)06-0060-06

考虑如下半线性椭圆方程：

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\dfrac{u}{|x|^{2(1+a)}}=\dfrac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u+f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中边界光滑的有界开集，且 $0\in\Omega$. 另有：

$$0\leqslant a<\sqrt{\bar{\mu}}\qquad 0\leqslant\mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2$$

$$\bar{\mu}=\frac{(N-2)^2}{4}\qquad a<b<a+1$$

$p=p(a,b)=\dfrac{2N}{N-2(1+a-b)}$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数. $f\in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，定义

$$F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s\qquad x\in\Omega,\ t\in\mathbb{R}$$

则 $F(x,t)$ 是 $f(x,t)$ 的原函数.

在本文中，我们记

$$\|u\|=\left(\int_\Omega\left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

由加权的 Hardy 不等式知，当 $\mu\in[0,(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2)$ 时，此处范数 $\|u\|$ 等价于 Sobolev 空间 $H_0^1(|x|^{-2a},\Omega)$ 中的常用范数，不妨记 $H=H_0^1(|x|^{-2a},\Omega)$.

---

① 收稿日期：2014-09-15
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267)；贵州省教育厅自然科学基金项目(2010086)；贵州省科学技术科学基金项目(LKZS[2011]2117；LKZS[2014]22).
作者简介：刘海燕(1990-)，女，四川资阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师.

近年来，许多学者研究了方程(1)正解的存在性和解的多重性，如文献[1-6]. 特别地，文献[2-3]得到方程(1)至少有一个正解. 方程(1)是关于算子$-\Delta\cdot-\frac{\mu}{|x|^2}(0\leqslant\mu<\overline{\mu})$的推广，且文献[3]是文献[7]的推广，但它们均要求函数f满足(AR)条件. 本文将(AR)条件改为文献[1]中的非二次条件，即下面定理1的条件(f_2). 本文的主要困难是山路值的估计和$(C)_c$序列的有界性证明，主要结果如下：

定理1　假设$0\leqslant a<\sqrt{\mu}$，$N\geqslant 3(1+a)$，$p=\frac{2N}{N-2(1+a-b)}$，$0\leqslant\mu<(\sqrt{\mu}-a)^2$，$a<b<a+1$，$0<\lambda<\lambda_1$，$\lambda_1$是算子$-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla)-\mu|x|^{-2(1+a)}$的第一特征值，且$f$满足下列条件：

(f_1) $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$，$\limsup\limits_{t\to0+}\frac{F(x,t)}{t^2}<\frac{1}{2}\lambda$，且存在正常数$B$，使得$\limsup\limits_{|t|\to\infty}\frac{F(x,t)}{t^q}\leqslant B<\infty$对$x\in\overline{\Omega}$一致成立，其中$p\leqslant q<2^*=\frac{2N}{N-2}$；

(f_2) 存在正常数D和$\sigma>\frac{N(q-2)}{2}$，使得$\liminf\limits_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)t-2F(x,t)}{|t|^\sigma}\geqslant D$对几乎处处的$x\in\overline{\Omega}$一致成立；

(f_3) 存在常数$\rho>2$，使得$F(x,t)\geqslant Ct^\rho$对任何$(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+$成立.

另设

$$\rho>\max\left\{2,\frac{N}{\gamma},\frac{N-2\beta}{\sqrt{\mu}-a}\right\}\tag{2}$$

其中$\beta=\sqrt{(\sqrt{\mu}-a)^2-\mu}$且$\gamma=\sqrt{\mu}-a+\beta$. 则方程(1)至少有一个正解.

注1　本文将文献[3]中的(AR)条件减弱为非二次条件(f_2)，并得到与该文献相似的结果，使得满足条件的函数更多，例如函数f

$$f(x,t)=2t\ln(1+t^2)+\frac{2t^3}{1+t^2}\qquad t\in\mathbb{R}$$

满足本文条件却不满足文献[3]中的条件.

1　预备知识

为了求方程(1)的正解，我们考虑下面方程的非平凡解：

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}=\frac{(u^+)^{p-1}}{|x|^{bp}}+f(x,u^+) & x\in\Omega\backslash\{0\}\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$

其中$u^{\pm}=\max\{\pm u,0\}$. 方程(3)的对应泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|x|^{-2a}|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{(u^+)^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u^+)\mathrm{d}x\qquad u\in H$$

我们知道方程(3)的解和泛函I的临界点一一对应，从而若说$u\in H$是方程(3)的一个弱解，即对任何$v\in H$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_\Omega\left(|x|^{-2a}(\nabla u,\nabla v)-\mu\frac{uv}{|x|^{2(1+a)}}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{(u^+)^{p-1}v}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u^+)v\mathrm{d}x=0$$

设$c\in\mathbb{R}$，$\{u_n\}$是H上的序列，若泛函I在水平值c处满足：

(a) 任意的有界序列$\{u_n\}\subset H$，若当$n\to\infty$时，有$I(u_n)\to c$和$I'(u_n)\to0$，则该序列有收敛子列；

(b) 存在常数$\delta,R,\alpha>0$，使得当$n\to\infty$时，对任意的$u\in I^{-1}([c-\delta,c+\delta])$和$\|u\|\geqslant R$，有$\|I'(u_n)\|\|u_n\|\geqslant\alpha$成立.

则称泛函I满足$(C)_c$条件.

本文记最佳Hardy-Sobolev常数为A，当$\Omega=\mathbb{R}^N$时，A可以由下面函数达到：

$$y_\varepsilon(x)=\frac{(2\varepsilon p\beta^2)^{\frac{1}{p-2}}}{|x|^{\gamma'}(\varepsilon+|x|^{(p-2)\beta})^{\frac{2}{p-2}}}$$

其中 $\varepsilon>0$，$\gamma'=\sqrt{\mu}-a-\beta$. 此外，我们知道 $y_\varepsilon(x)$ 满足方程

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}=\frac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u \qquad x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$$

类似文献[3]，定义 $v_\varepsilon(x)$，则有

$$A+C_1\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}\leqslant\|v_\varepsilon\|^2\leqslant A+C_2\varepsilon^{\frac{2}{p-2}} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases}C_3\varepsilon^{\frac{\xi}{p-2}}\leqslant\int_\Omega|v_\varepsilon(x)|^\xi\mathrm{d}x\leqslant C_4\varepsilon^{\frac{\xi}{p-2}} & 1\leqslant\xi<\dfrac{N}{\gamma}\\ C_3\varepsilon^{\frac{\xi}{p-2}}|\ln\varepsilon|\leqslant\int_\Omega|v_\varepsilon(x)|^\xi\mathrm{d}x\leqslant C_4\varepsilon^{\frac{\xi}{p-2}}|\ln\varepsilon| & \xi=\dfrac{N}{\gamma}\\ C_3\varepsilon^{\frac{N-\xi(\sqrt{\mu}-a)}{(p-2)\beta}}\leqslant\int_\Omega|v_\varepsilon(x)|^\xi\mathrm{d}x\leqslant C_4\varepsilon^{\frac{N-\xi(\sqrt{\mu}-a)}{(p-2)\beta}} & \dfrac{N}{\gamma}<\xi<2^*\end{cases} \tag{5}$$

引理 1　设 $0\leqslant a<\sqrt{\mu}$，$a<b<a+1$，$0<\lambda<\lambda_1$. 若条件(f_1)，(f_3)和(2)式成立，则存在 $u_0\in H$，$u_0\neq0$，使得

$$\sup_{t\geqslant0}I(tu_0)<\frac{p-2}{2p}A^{\frac{p}{p-2}}$$

证　考虑函数：

$$k(t)=I(tv_\varepsilon)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^p}{p}-\int_\Omega F(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x$$

$$\tilde{k}(t)=\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^p}{p}$$

根据定义，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}k(t)=-\infty$，$k(0)=0$，且当 $t\to0^+$ 时，$k(t)>0$. 因此$\sup\limits_{t\geqslant0}k(t)$可以在某个 $t_\varepsilon>0$ 处取得. 取 $M_1=(pA)^{\frac{1}{p-2}}+1$，因为

$$k(t)\leqslant\frac{t^2}{2}\|v_\varepsilon\|^2-\frac{t^p}{p}\leqslant t^2\left(A-\frac{t^{p-2}}{p}\right)$$

所以当 $t\geqslant M_1$ 时，$k(t)<0$，从而 $t_\varepsilon\leqslant M_1$. 另取 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2Bq(M_1)^{q-p}}$，由(5)式知，当 $\varepsilon\to0^+$ 时，有

$$\int_\Omega|v_\varepsilon(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_1$$

又由条件(f_1)和 $0<\lambda<\lambda_1$，知

$$|f(x,t)|\leqslant Bq|t|^{q-1}+\lambda_1|t| \tag{6}$$

最后结合 $k'(t_\varepsilon)=0$ 和(6)式，知

$$\|v_\varepsilon\|^2\leqslant t_\varepsilon^{p-2}+Bq\int_\Omega|t_\varepsilon|^{q-2}|v_\varepsilon|^q\mathrm{d}x+\lambda_1\int_\Omega|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x \tag{7}$$

结合式子(4)和(5)，可以得到$\int_\Omega|v_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{A}{4\lambda_1}$，且

$$t_\varepsilon^{p-2}+Bq\int_\Omega|t_\varepsilon|^{q-2}|v_\varepsilon|^q\mathrm{d}x\leqslant t_\varepsilon^{p-2}\left(1+\frac{B}{q}(M_1)^{q-p}\varepsilon_1\right)\leqslant\frac{3}{2}t_\varepsilon^{p-2}$$

结合(7)式易得，当 ε 充分小时，

$$t_\varepsilon^{p-2}\geqslant\frac{A}{2} \tag{8}$$

此外，由基本不等式$(a+b)^r \leqslant a^r + r(a+1)^{r-1}b\ (a,b>0,\ r\geqslant 1)$和(4)式可以证得

$$\| v_\varepsilon \|^{\frac{2p}{p-2}} \leqslant A^{\frac{p}{p-2}} + C_5 \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} \tag{9}$$

记 $t'_\varepsilon = \| v_\varepsilon \|^{\frac{2}{p-2}}$，根据 $\tilde{k}(t)$ 的定义知，$\sup\limits_{t\geqslant 0} \tilde{k}(t) = \tilde{k}(t'_\varepsilon)$. 再次利用条件$(f_1)$和$(f_3)$，以及式子(8)和(9)，我们可以算得

$$\begin{aligned} k(t_\varepsilon) \leqslant \tilde{k}(t'_\varepsilon) - \int_\Omega F(x, t_\varepsilon v_\varepsilon)\mathrm{d}x \leqslant \\ \frac{p-2}{2p}A^{\frac{p}{p-2}} + C_6 \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} - C\int_\Omega t_\varepsilon^\rho \mid v_\varepsilon \mid^\rho \mathrm{d}x \leqslant \\ \frac{p-2}{2p}A^{\frac{p}{p-2}} + C_6 \varepsilon^{\frac{2}{p-2}} - C\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{\rho}{p-2}} \int_\Omega \mid v_\varepsilon \mid^\rho \mathrm{d}x \end{aligned}$$

再由(5)式，有

$$\int_\Omega \mid v_\varepsilon \mid^\rho \mathrm{d}x \geqslant C_3 \varepsilon^{\frac{N-\rho(\sqrt{\mu}-a)}{(p-2)\beta}}$$

最后由(2)式，有

$$\frac{2}{p-2} > \frac{N-\rho(\sqrt{\mu}-2)}{(p-2)\beta}$$

所以当 ε 选充分小时，有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tv_\varepsilon) = k(t_\varepsilon) < \frac{p-2}{2p}A^{\frac{p}{p-2}}$$

引理 2 若条件(f_1)和(f_2)成立，则对任何的数 $c \in \mathbb{R}$，泛函 I 满足$(C)_c$ 条件.

证 因为条件(f_2)成立，所以存在常数 $D_1 > 0$，$D_2 > 0$，使得

$$f(x, t)t - 2F(x, t) \geqslant D_1 \mid t \mid^\sigma - D_2 \qquad t \in \mathbb{R},\ \text{a. e. } x \in \Omega \tag{10}$$

此外，由于函数 f 的次临界增长条件保证了泛函满足条件(a)，从而我们只需要证明泛函满足条件(b). 不妨假设这个条件不成立，即存在$c \in \mathbb{R}$和序列$\{u_n\} \subset H$，满足 $\| u_n \| \to \infty$，$I(u_n) \to c$，但是当$n\to\infty$时，$\| I'(u_n) \| \| u_n \| \to 0$. 利用(10)式，当 n 充分大时，我们有

$$\begin{aligned} 2c+1 \geqslant 2I(u_n) - \frac{1}{\xi}\langle I'(u_n), u_n \rangle = \\ \left(1-\frac{2}{p}\right)\int_\Omega \frac{(u_n^+)^p}{\mid x \mid^{bp}}\mathrm{d}x + \int_\Omega (f(x, u_n^+)u_n - 2F(x, u_n^+))\,\mathrm{d}x \geqslant \\ \left(1-\frac{2}{p}\right)\int_\Omega \frac{(u_n^+)^p}{\mid x \mid^{bp}}\mathrm{d}x + D_1 \mid u_n \mid_\sigma^\sigma - D_2 \mid \Omega \mid \end{aligned}$$

于是得到 $u_n \in L^\sigma(\Omega)$，且存在常数 $M_2, M_3 > 0$，使得

$$\mid u_n \mid_\sigma \leqslant M_2 \tag{11}$$

和

$$\int_\Omega (u_n^+)^p \mid x \mid^{-bp} \mathrm{d}x \leqslant M_3 \tag{12}$$

进一步结合条件(f_1)以及(6),(12)式，存在常数 $B_1, B_2 > 0$，使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\| u_n \|^2 - I(u_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{(u_n^+)^p}{\mid x \mid^{bp}}\mathrm{d}x + \int_\Omega F(x, u_n^+)\mathrm{d}x \leqslant \\ B_1 \mid u_n \mid_q^q + B_2 \mid \Omega \mid + \frac{M_3}{p} \end{aligned} \tag{13}$$

另一面，利用插值公式

$$\mid u \mid_q = \mid u \mid_\sigma^t \mid u \mid_{2^*}^{1-t} \qquad u \in L^\sigma(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega) \tag{14}$$

其中 $0<\sigma\leqslant q<2^*$ 且 $\frac{1}{q}=\frac{t}{\sigma}+\frac{1-t}{2^*}$，$t\in(0,1]$，结合(11)，(13)，(14)式以及 Sobolev 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n\|^2\leqslant B_1|u_n|_q^q+B_2|\Omega|+\frac{M_3}{p}+I(u_n)\leqslant\\ B_1|u|_\sigma^{qt}|u|_{2^*}^{q(1-t)}+B_2|\Omega|+\frac{M_3}{p}+c+1\leqslant\\ B_1M_2^{qt}C_7\|u\|^{q(1-t)}+B_2|\Omega|+\frac{M_3}{p}+c+1\end{aligned}\tag{15}$$

根据 $\frac{1}{q}=\frac{t}{\sigma}+\frac{1-t}{2^*}$，推出 $q(1-t)=\frac{2^*(\sigma-q)}{\sigma-2^*}$. 又因为 $\sigma>\frac{N(q-2)}{2}$，所以 $q(1-t)<2$. 最后由(15)式，推出 $\{u_n\}$ 是一个有界序列，与假设矛盾.

2　定理的证明

定理 1 的证明　对任意的 $\varepsilon>0$ 和常数 B_3，根据条件(f_1)，有

$$|F(x,t)|\leqslant B_3|t|^q+\frac{\lambda+\varepsilon}{2}|t|^2\qquad t\in\mathbb{R}_+,\ \text{a. e. } x\in\Omega\tag{16}$$

不妨让 ε 满足 $\lambda+\varepsilon<\lambda_1$. 利用不等式：

$$\lambda_1|u|_2^2\leqslant\|u\|^2\qquad |u|_q^q\leqslant C_9\|u\|^q$$

$$\int_\Omega(u^+)^p|x|^{-bp}\mathrm{d}x\leqslant C_8\|u\|^p$$

以及(16)式，我们有

$$\begin{aligned}I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{(u^+)^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u^+)\mathrm{d}x\geqslant\\ \frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{C_8}{p}\|u\|^p-\frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2-B_3\|u\|_{L^q}^q\geqslant\\ \frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{C_8}{p}\|u\|^p-\frac{\lambda+\varepsilon}{2\lambda_1}\|u\|^2-B_3C_9\|u\|^p\end{aligned}$$

因此，存在常数 $\alpha>0$，使得 $I(u)\geqslant\alpha$ 对任意的 $u\in\partial B_r=\{u\in H\,\big|\,\|u\|=r\}$ 成立，其中 $r>0$ 充分小. 由引理 1，存在 $u_0\in H$，$u_0\neq0$，使得

$$\sup_{t\geqslant0}I(tu_0)<\frac{p-2}{2p}A^{\frac{p}{p-2}}$$

又由 F 的非负性知

$$\begin{aligned}I(tu_0)=\frac{t^2}{2}\|u_0\|^2-\frac{t^p}{p}\int_\Omega\frac{(u_0^+)^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,tu_0^+)\mathrm{d}x\leqslant\\ \frac{t^2}{2}\|u_0\|^2-\frac{t^p}{p}\int_\Omega\frac{(u_0^+)^p}{|x|^{bp}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(tu_0)\to-\infty$. 因此，我们选择 $t_0>0$，使得 $\|t_0u_0\|>r$ 且 $I(t_0u_0)\leqslant0$. 结合引理 1 和引理 2，应用山路引理，方程(1)有一个弱解 u. 因为 $\langle I'(u),u^-\rangle=0$，从而 $u\geqslant0$，最后由强极大值原理，u 是方程(1)的正解，定理 1 成立.

参考文献：

[1]　COSTA D G, MAGALHÃES C A. Variational Elliptic Problems Which Are Nonquadratic at Infinity [J]. Nonlinear Anal, 1994, 23(11): 1401-1412.

[2]　HUANG Xiao-jiao, WU Xing-ping, TANG Chun-lei. Multiple Positive Solutions for Semilinear Elliptic Equations with

Critical Weighted Hardy-Sobolev Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(7): 2602－2611.

[3] HUANG Li, WU Xing-ping, TANG Chun-lei. Existence and Multiplicity of Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Critical Weighted Hardy-Sobolev Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(5－6): 1916－1924.

[4] KANG Dong-sheng. On the Elliptic Problems with Critical Weighted Sobolev-Hardy Exponents [J]. Nonlinear Anal, 2007, 66(5): 1037－1050.

[5] LIN Mei-lin. Some Further Results for a Class of Weighted Nonlinear Elliptic Equations [J]. J Math Anal Appl, 2008, 337(1): 537－546.

[6] 黄晓娇，吴行平，唐春雷. 具有临界带权 Hardy-Sobolev 指数的椭圆方程的多个正解 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(10)：113－117.

[7] DING Ling, TANG Chun-lei. Existence and Multiplicity of Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Hardy Terms and Hardy-Sobolev Critical Exponents [J]. Appl Math Lett, 2007, 20(12): 1175－1183.

[8] 宋圆圆，吴行平，唐春雷. 一类边界奇异带有临界 Sobolev 指数的非齐次 Neumann 问题的两个正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2013，38(10)：34－37.

Existence of Positive Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Critical Hardy-Sobolev Exponents

LIU Hai-yan[1], LIAO Jia-feng[1,2], TANG Chun-lei[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563002, China

Abstract: We deal with a class of semilinear elliptic equations with Hardy term, critical weighted Hardy-Sobolev exponents, Dirichlet boundary condition and superlinear nonlinearity,

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u)-\mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}}=\frac{|u|^{p-2}}{|x|^{bp}}u+f(x,u)$$

By means of the mountain pass lemma and the strong maximum principle, at least one positive solution is obtained when the functions $f(x,t)$ and a, b, μ satisfy some conditions.

Key words: critical Hardy-Sobolev exponent; mountain pass lemma; semilinear elliptic equation

责任编辑 廖 坤