第 37 卷第 6 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2015 年 6 月
Vol. 37　No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun.　2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.06.012

球面上具有平行平均曲率向量的子流形[①]

何盼盼，　姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论了球面 S^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的子流形 M^n. 通过活动标架法和 Hopf 极大值原理，得到了一个关于 M^n 位于 $n+1$ 维全测地子流形 S^{n+1} 中的 Pinching 定理.

关　键　词：平行平均曲率向量；子流形；全测地

中图分类号：**O186.1**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2015)06-0072-04

设 N^{n+p} 是 $n+p$ 维具有常曲率 c 的 Riemann 流形，M 是等距浸入在 $N^{n+p}(c)$ 中的 n 维 Riemann 流形，S 和 H 分别是 $M \longrightarrow N^{n+p}(c)$ 的第二基本形式长度平方和平均曲率.

文献[1] 指出：设 M 是 n 维紧致 Riemann 流形，浸入在 $n+p$ 维单位球面中，具有平行平均曲率向量，$p \geqslant 2$，若

$$S \leqslant \frac{n}{\sqrt{n}+3-\frac{1}{p-1}}$$

则 M 位于 S^{n+p} 的全测地子流形 S^{n+1} 中.

文献[2] 得到了一个 Pinching 常数，得到了如下的结果：设 M 是 n 维紧致 Riemann 流形，浸入在 $n+p$ 维单位球面 S^{n+p} 中，具有平行平均曲率向量，当

$$S \leqslant \max\left\{\frac{n(1+2H^2)}{\sqrt{n}+1},\ \frac{n(1+H^2)}{\sqrt{n-1}+1}\right\}$$

时，M 位于 S^{n+p} 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 S^{n+1} 中.

本文主要讨论球面上具有平行平均曲率向量的子流形，得到了如下主要结果：

定理 1　设 M 是 $n+p$ 维单位球面 S^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的 n 维子流形，若

$$\left(3-\frac{1}{p-1}\right)S+n\mid H\mid\sqrt{S}-n \leqslant 0$$

则 M 位于 S^{n+p} 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 S^{n+1} 中，其中 $n \geqslant 3$，$p \geqslant 2$.

推论 1　设 $M^n \longrightarrow S^{n+p}(1)$ 是等距浸入，且 M 具有平行平均曲率向量，$p \geqslant 2$，若

$$0 \leqslant \sqrt{S} \leqslant \frac{\sqrt{n^2H^2+8n}-n\mid H\mid}{6}$$

则 M 位于 S^{n+p} 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 S^{n+1} 中.

---

① 收稿日期：2014-07-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11471188).

作者简介：何盼盼(1989-)，女，河南商丘人，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

通信作者：姚纯青，副教授.

由文献[3-4]知：设 M 是 n 维 Riemann 流形，等距浸入在一个具有常截面曲率 c 的 $n+p$ 维 Riemann 流形 $N(c)$ 中. 选取 $N(c)$ 中的局部标准正交标架场 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}\}$，使得限制在 M 上的向量场 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 M 相切. 对指标范围我们作如下约定：

$$A, B, C, \cdots = 1, \cdots, n+p$$

$$i, j, k, \cdots = 1, \cdots, n$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots = n+1, \cdots, n+p$$

设 $\{\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{n+p}\}$ 是 $N(c)$ 中标架场 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n+p}\}$ 的对偶场，那么有：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_A = -\sum \boldsymbol{\omega}_{AB} \wedge \boldsymbol{\omega}_B \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{BA} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{AB} = -\sum \boldsymbol{\omega}_{AC} \wedge \boldsymbol{\omega}_{CB} + \Phi_{AB} \qquad \Phi_{AB} = \frac{1}{2}\sum K_{ABCD}\boldsymbol{\omega}_C \wedge \boldsymbol{\omega}_D \tag{2}$$

$$K_{ABCD} = c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \tag{3}$$

限制到 M 上，有 $\boldsymbol{\omega}_\alpha = \boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{0} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_\alpha = -\sum \boldsymbol{\omega}_{\alpha j} \wedge \boldsymbol{\omega}_j$，所以由 Cartan 引理得到

$$\boldsymbol{\omega} = \sum h_{ij}^\alpha \boldsymbol{\omega}_j \qquad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha \tag{4}$$

由(4)式得到：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i = -\sum \boldsymbol{\omega}_{ij} \wedge \boldsymbol{\omega}_j \qquad \boldsymbol{\omega}_{ij} + \boldsymbol{\omega}_{ji} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{ij} = -\sum \boldsymbol{\omega}_{ik} \wedge \boldsymbol{\omega}_{kj} + \boldsymbol{\Omega}_{ij} \qquad \boldsymbol{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\boldsymbol{\omega}_k \wedge \boldsymbol{\omega}_l \tag{6}$$

M^n 的 Gauss 方程为

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \tag{7}$$

对(5)式外微分，可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta} = -\sum \boldsymbol{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\gamma\beta} + \boldsymbol{\Omega}_{\alpha\beta} \qquad \boldsymbol{\Omega}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta kl}\boldsymbol{\omega}_k \wedge \boldsymbol{\omega}_l \tag{8}$$

M^n 的 Ricci 方程为

$$R_{\alpha\beta kl} = \sum (h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta - h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta) \tag{9}$$

对每个 α，我们用 $\boldsymbol{H}_\alpha$ 表示矩阵 (h_{ij}^α)，称 $\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i,\alpha} h_{ii}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ 为平均曲率向量. 如果对一切 α, β，有 $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{0}$，则称 M 的法丛是平坦的，这时对一切 α, β，有

$$\boldsymbol{H}_\alpha \boldsymbol{H}_\beta = \boldsymbol{H}_\beta \boldsymbol{H}_\alpha \tag{10}$$

且所有的 $\boldsymbol{H}_\alpha$ 可以同时对角化；反之，当(10)式对一切 α, β 成立时，M 的法丛必是平坦的.

h_{ij}^α 的一阶和二阶共变导数分别定义为：

$$\sum h_{ijk}^\alpha \boldsymbol{\omega}_k = \mathrm{d}h_{ij}^\alpha - \sum h_{ik}^\alpha \boldsymbol{\omega}_{kj} - \sum h_{kj}^\alpha \boldsymbol{\omega}_{ki} + \sum h_{ij}^\beta \boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta} \tag{11}$$

$$\sum h_{ijkl}^\alpha \boldsymbol{\omega}_l = \mathrm{d}h_{ijk}^\alpha - \sum h_{ljk}^\alpha \boldsymbol{\omega}_{li} - \sum h_{ilk}^\alpha \boldsymbol{\omega}_{lj} - \sum h_{ijl}^\alpha \boldsymbol{\omega}_{lk} + \sum h_{ijk}^\beta \boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta} \tag{12}$$

因此得到 Codazzi 方程和 Ricci 恒等式分别为：

$$h_{ijk}^\alpha - h_{ikj}^\alpha = -K_{\alpha ijk} = 0 \tag{13}$$

$$h_{ijkl}^\alpha - h_{ijlk}^\alpha = \sum h_{im}^\alpha R_{mjkl} + \sum h_{mj}^\alpha R_{mikl} - \sum h_{ij}^\beta R_{\alpha\beta kl} \tag{14}$$

由(13)式及(14)式得

$$\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_k h_{ijkk}^\alpha = \sum_k h_{kkij}^\alpha + \sum_{k,m} h_{km}^\alpha R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{mi}^\alpha R_{mkjk} - \sum_{k,\beta} h_{ki}^\beta R_{\alpha\beta jk} \tag{15}$$

取 $\boldsymbol{e}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|}$，因此 $\sum_i h_{ii}^\alpha = 0$，$\alpha \neq n+1$，且

$$\sum_i h_{ii}^{n+1}=nH \tag{16}$$

由 $\boldsymbol{\omega}_{\alpha,n+1}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{H}_\alpha\boldsymbol{H}_{n+1}=\boldsymbol{H}_{n+1}\boldsymbol{H}_\alpha$. 当 $\beta\neq n+1$ 时，由(15) 式知

$$\Delta h_{ij}^\beta=\sum_{k,m}h_{km}^\beta R_{mijk}+\sum_{k,m}h_{mi}^\beta R_{mkjk}-\sum_{k,\alpha\neq n+1}h_{ki}^\alpha R_{\beta\alpha jk} \tag{17}$$

定理 1 的证明

由定理 1 的条件，$\boldsymbol{e}_{n+1}$ 在法丛中平行，把 Gauss 方程(7)、Ricci 方程(9) 代入(17) 式，得到

$$\Delta h_{ij}^\beta=\sum_{\alpha,k,m}h_{km}^\beta h_{mj}^\alpha h_{ik}^\alpha-\sum_{\alpha,k,m}h_{km}^\beta h_{mk}^\alpha h_{ij}^\alpha+\sum_{\alpha,k,m}h_{mi}^\beta h_{mj}^\alpha h_{kk}^\alpha-\sum_{\alpha,k,m}h_{mi}^\beta h_{mk}^\alpha h_{kj}^\alpha+nh_{ij}^\beta-\sum_{k,\alpha\neq n+1}h_{ki}^\alpha R_{\beta\alpha jk} \tag{18}$$

其中 $\beta\neq n+1$. 由文献[4] 的定理 5.3.7 中 Simons 不等式的证明，得到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta\Delta h_{ij}^\beta\geqslant&\sum_{i,j,k,m,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta h_{km}^\beta h_{mj}^{n+1}h_{ik}^{n+1}-\sum_{i,j,k,m,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta h_{km}^\beta h_{mk}^{n+1}h_{ij}^{n+1}+\\&\sum_{i,j,k,m,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta h_{mi}^\beta h_{mj}^{n+1}h_{kk}^{n+1}-\sum_{i,j,k,m,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta h_{mi}^\beta h_{mk}^{n+1}h_{kj}^{n+1}+\\&n\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2-\left(2-\frac{1}{p-1}\right)\Big[\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2\Big]^2\end{aligned} \tag{19}$$

对于固定的 $\boldsymbol{e}_\beta$，选取标架$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$，使得矩阵$(h_{ij}^\beta)$ 为对角阵. 因此(19) 式不等号右边的前 4 项可化为

$$\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{kk}^\beta h_{ki}^{n+1}h_{ik}^{n+1}-\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{kk}^\beta h_{kk}^{n+1}h_{ii}^{n+1}+\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{ii}^\beta h_{ii}^{n+1}h_{kk}^{n+1}-\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{ii}^\beta h_{ik}^{n+1}h_{ki}^{n+1} \tag{20}$$

另一方面，从(16) 式得到

$$\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{kk}^\beta h_{ki}^{n+1}h_{ik}^{n+1}=\sum_{i,k}h_{ii}^\beta h_{ii}^\beta h_{ik}^{n+1}h_{ki}^{n+1} \tag{21}$$

因此，(20) 式可化为

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_i(h_{ii}^\beta)^2h_{ii}^{n+1}\Big)\Big(\sum_k h_{kk}^{n+1}\Big)-\Big(\sum_i h_{ii}^\beta h_{ii}^{n+1}\Big)^2=\\&nH\Big(\sum_i(h_{ii}^\beta)^2h_{ii}^{n+1}\Big)-\Big(\sum_i h_{ii}^\beta h_{ii}^{n+1}\Big)^2\end{aligned} \tag{22}$$

由 Schwarz 不等式得：

$$\begin{aligned}\Big|nH\Big(\sum_i(h_{ii}^\beta)^2h_{ii}^{n+1}\Big)\Big|\leqslant&\,n\,|H|\sqrt{\sum_i(h_{ii}^\beta)^4\sum_k(h_{kk}^{n+1})^2}\leqslant\\&n\,|H|\sqrt{\Big[\sum_i(h_{ii}^\beta)^2\Big]^2\sum_k(h_{kk}^{n+1})^2}\leqslant\\&n\,|H|\sum_i(h_{ii}^\beta)^2\sqrt{\sum_k(h_{kk}^{n+1})^2}\leqslant\\&n\,|H|\sqrt{S}\sum_i(h_{ii}^\beta)^2\end{aligned} \tag{23}$$

$$\Big(\sum_i h_{ii}^\beta h_{ii}^{n+1}\Big)^2\leqslant\sum_i(h_{ii}^\beta)^2\sum_i(h_{ii}^{n+1})^2\leqslant S\sum_{i,j}(h_{ij}^\beta)^2 \tag{24}$$

因此，(19) 式化为

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\beta\neq n+1}h_{ij}^\beta\Delta h_{ij}^\beta\geqslant&(-n\,|H|\sqrt{S}-S)\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2+\\&n\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2-\left(2-\frac{1}{p-1}\right)S\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2=\\&\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^\beta)^2\left[n-\left(3-\frac{1}{p-1}\right)S-n\,|H|\sqrt{S}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

因为

$$\frac{1}{2}\Delta\Big(\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2\Big)=\sum_{i,j,k,\beta\neq n+1}(h_{ijk}^{\beta})^2+\sum_{i,j,\beta\neq n+1}h_{ij}^{\beta}\Delta h_{ij}^{\beta} \tag{26}$$

又由条件$\left(3-\frac{1}{p-1}\right)S+n\mid H\mid\sqrt{S}-n\leqslant 0$，以及(25)式和(26)式知，$\sum\limits_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2$ 在 M^n 上是下调和的. 由 Hopf 极大原理知，$\sum\limits_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2$ 是常数，因此(26)式的右边为 0. 特别地，有

$$\sum_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2\left[n-\left(3-\frac{1}{p-1}\right)S-n\mid H\mid\sqrt{S}\right]=0 \tag{27}$$

如果 $\sum\limits_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2=0$，那么由文献[5]中的定理 2 知，$M$ 位于一个 $n+1$ 维的全测地子流形 S^{n+1} 中.

如果$\left(3-\frac{1}{p-1}\right)S+n\mid H\mid\sqrt{S}-n=0$，那么所有的不等式都将变为等式，因此 $\sum\limits_{i,j,\beta\neq n+1}(h_{ij}^{\beta})^2=0$，故 M 位于一个 $n+1$ 维的全测地子流形 S^{n+1} 中.

参考文献：

[1] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature II [J]. Amer J Math，1975，97(1)：76－81.

[2] 莫小欢. 常曲率空间中具有平行平均曲率向量的子流形 [J]. 数学年刊，1988，9(5)：530－535.

[3] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature I [J]. Amer J Math，1974，96(2)：347－351.

[4] 白正国，沈一兵，水乃翔，等. 黎曼几何初步(修订版) [M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[5] ERBACHER J. Reduction of the Codimension of an Isometric Immersion [J]. J Differential Geometry，1971(5)：333－340.

[6] 童 燕. 拟常曲率空间中极小子流形的 Pinching 条件 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(2)：106－109.

A Submanifold with a Parallel Mean Curvature Vector on the Sphere

HE Pan-pan， YAO Chun-qing

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This article discusses M^n，the submanifold with a parallel mean curvature vector on the sphere S^{n+p}. Using the moving frame method and the Hopf maximum principle, a pinching theorem is obtained which states that M^n lies in a totally geodesic submanifold S^{n+1}.

Key words：parallel mean curvature vector；submanifold；totally geodesic

责任编辑 廖 坤