DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.06.013

求解奇异鞍点问题的 GPHSS-GSOR 迭代法的半收敛性①

曾闽丽，　林则安，　林智期

莆田学院 数学学院，福建 莆田 351100

摘要： 在 Hermitian 与反 Hermitian 分裂（HSS）迭代法和广义的 SOR（GSOR）迭代法的基础上，把针对非奇异鞍点问题的 PHSS-SOR 分裂迭代方法推广至广义的 PHSS-SOR（GPHSS-GSOR）分裂迭代法，并用于奇异鞍点问题的求解. 详细分析了求解奇异鞍点问题的 GPHSS-GSOR 迭代法的半收敛性，用数值实验验证了新算法的有效性.

关　键　词： 奇异鞍点问题；迭代法；半收敛性

中图分类号： O241.6　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2015)06－0076－05

考虑奇异鞍点问题：

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ -\boldsymbol{q}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为对称正定（SPD）矩阵，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$（$n\leqslant m$）为列不满秩矩阵，即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})<n$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{y},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{n}$. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 是已知向量.

鞍点问题在科学与工程领域中有着较为广泛的应用，如二阶椭圆方程的离散近似，最小二乘问题，约束最优化问题等，更加详细的应用背景可参见文献[1]. 当 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵且 $\boldsymbol{B}$ 为满秩矩阵时，鞍点问题(1) 的系数矩阵为非奇异的，此时有效的求解方法有 Uzawa 类方法[2]、SOR 类方法[3]、RPCG 方法[4]、预处理的 Krylov 子空间方法[5] 等. 当矩阵 $\boldsymbol{B}$ 列不满秩时，鞍点问题(1) 的系数矩阵为奇异矩阵. 近几年来，许多文献在奇异鞍点问题的求解上有了显著的研究成果，主要有 GPIU 迭代法[6]、PAHSS 迭代法[7] 以及预处理的 Uzawa 迭代法[8] 等，相关的算法也可参见文献[9－10]. 本文将文献[11] 中的 PHSS-SOR 方法推广为广义的 PHSS-SOR(GPHSS-GSOR) 迭代法，并分析了求解奇异鞍点问题的 GPHSS-GSOR 方法的半收敛性. 在本文中，null($\boldsymbol{A}$) 和 $R(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间和值域空间.

1　GPHSS-GSOR 迭代法

对鞍点问题(1) 的系数矩阵 $\boldsymbol{F}$ 作如下交错方向的分裂：

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{S})=\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{L})-\boldsymbol{\Omega}^{-1}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U}]$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\qquad \boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

① 收稿日期：2014－09－06
基金项目：国家自然科学基金项目(61373140)；福建省高校服务海西建设重点项目(2008HX03).
作者简介：曾闽丽(1982－)，女，福建宁化人，讲师，主要从事数值代数和微分方程数值解的研究.

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}\omega\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \tau\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定矩阵.

则可构造 GPHSS-GSOR 迭代法为:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega D}+\boldsymbol{H})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}\\ \boldsymbol{y}^{(k+\frac{1}{2})}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\Omega D}-\boldsymbol{S})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k)}\\ \boldsymbol{y}^{(k)}\end{pmatrix}+\boldsymbol{b}\\ (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\Omega L})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}\end{pmatrix}=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\Omega U}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}\\ \boldsymbol{y}^{(k+\frac{1}{2})}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Omega b}\end{cases}\tag{2}$$

若记

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}(\omega,\tau)-\boldsymbol{N}(\omega,\tau)$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}(\omega,\tau)=\begin{pmatrix}\dfrac{\omega(1+\omega)}{\tau(1+\omega^2)}\boldsymbol{A}-\dfrac{\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\boldsymbol{B}\\ -\dfrac{\tau\omega}{1+\tau^2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \dfrac{\tau}{1+\tau^2}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{N}(\omega,\tau)=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\omega(1+\omega)}{\tau(1+\omega^2)}-1\right)\boldsymbol{A}-\dfrac{\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \left[\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}-1\right]\boldsymbol{B}\\ \left(1-\dfrac{\tau\omega}{1+\tau^2}\right)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \dfrac{\tau}{1+\tau^2}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}\end{cases}\tag{3}$$

则迭代格式(2)可等价地写成

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}(\omega,\tau)^{-1}\boldsymbol{N}(\omega,\tau)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k)}\\ \boldsymbol{y}^{(k)}\end{pmatrix}+\boldsymbol{M}(\omega,\tau)^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ -\boldsymbol{q}\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}(\omega,\tau)\boldsymbol{z}^{(k)}+\boldsymbol{c}\tag{4}$$

2 半收敛性分析

接下来,我们分析求解奇异鞍点问题(1)的 GPHSS-GSOR 迭代格式(4)的半收敛性.

定理 1 假设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 是对称正定矩阵,$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}(m\geqslant n)$ 满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})<n$,若 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵,$\omega,\tau>0$,且

$$\mathrm{null}(\boldsymbol{B})\cap R\left(\frac{1+\tau^2}{\tau}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\{\boldsymbol{0}\}$$

那么 $\mathrm{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}(\omega,\tau))=1$.

证 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^m$,$\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^n$,满足

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{FX}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{B\eta}\\ -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$$

由文献[12]的引理 3.5 知,只需证 $\boldsymbol{FM}(\omega,\tau)^{-1}\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$. 由于 $\mathrm{null}(\boldsymbol{F})=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}\right\}$,其中 $\boldsymbol{B\phi}=\boldsymbol{0}$. 因此,存在向量 $\boldsymbol{\phi}_0$,使得 $\boldsymbol{B\phi}_0=\boldsymbol{0}$,且

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}(\omega,\tau)\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\phi}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\boldsymbol{B\phi}_0\\ \dfrac{\tau}{1+\tau^2}\boldsymbol{Q\phi}_0\end{pmatrix}\tag{5}$$

结合 $\mathrm{null}(\boldsymbol{B})\cap R\left(\dfrac{1+\tau^2}{\tau}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\{\boldsymbol{0}\}$,得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B\eta}=\boldsymbol{0}$. 又因 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵,故 $\boldsymbol{B\eta}=\boldsymbol{0}$,进而

$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$，与 $\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$ 矛盾. 因此假设不成立，即 $\operatorname{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}(\omega,\tau))=1$.

定理 2　假设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}(m\geqslant n)$ 为列秩亏的矩阵，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，$\omega,\tau>0$，λ 是迭代矩阵 $\boldsymbol{T}(\omega,\tau)$ 的一个特征值，$[\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}]\in\mathbb{R}^{m+n}$ 为对应的特征向量. 则 $\lambda=1$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

证　先证必要性. 若 $\lambda=1$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{Au}+\boldsymbol{Bv}=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\mathbf{0}\end{cases}\tag{6}$$

将(6) 式中第一个式子变换为 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Bv}$，代入第二个式子，得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Bv}=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 均为对称正定矩阵，因此 $\boldsymbol{Bv}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

接下来证充分性. 如果 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$，则

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}-1\right]\boldsymbol{Bv}=\lambda\,\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\boldsymbol{Bv}\\ \dfrac{\tau}{1+\tau^2}\boldsymbol{Qv}=\lambda\,\dfrac{\tau}{1+\tau^2}\boldsymbol{Qv}\end{cases}\tag{7}$$

因为 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$，$\tau\neq\mathbf{0}$，且 $\boldsymbol{Q}$ 是正定的，从(7) 式的第二个式子中解得 $\lambda=1$.

定理 3　假设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为对称正定矩阵，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}(m\geqslant n)$ 为列秩亏的矩阵，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，$\omega,\tau>0$，$\lambda\neq1$ 是迭代矩阵 $\boldsymbol{T}(\omega,\tau)$ 的一个特征值，$[\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}]\in\mathbb{R}^{m+n}$ 是其对应的特征向量. 若 $\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是对称半正定矩阵，令

$$\alpha=\frac{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{Au}}{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}>0\qquad\beta=\frac{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}\geqslant0$$

$$\alpha_1=\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}\qquad\beta_1=\frac{\tau\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}$$

$$\alpha_2=\tau-\frac{2\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}\qquad\beta_2=\tau\omega+\frac{2\tau\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}$$

$$\alpha_3=\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}-\tau\qquad\beta_3=1-\tau^2-\tau\omega-\frac{\tau\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}$$

则 λ 可以表示为

$$\lambda=\frac{-(\alpha_2\alpha+\beta_2\beta)\pm\sqrt{(\alpha_2\alpha+\beta_2\beta)^2-4(\alpha_1\alpha+\beta_1\beta)(\alpha_3\alpha+\beta_3\beta)}}{2(\alpha_1\alpha+\beta_1\beta)}$$

证　假设 $\lambda(\neq1)$ 是迭代矩阵 $\boldsymbol{T}(\omega,\tau)$ 的一个特征值，$[\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}]\in\mathbb{R}^{m+n}$ 是其对应的特征向量，则

$$\boldsymbol{N}(\omega,\tau)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{M}(\omega,\tau)\boldsymbol{x}$$

即

$$\begin{cases}\left[\left(\dfrac{\omega(1+\omega)}{\tau(1+\omega^2)}-1\right)A-\dfrac{\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}BQ^{-1}B^{\mathrm{T}}\right]u+\left[\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}-1\right]Bv=\lambda\left[\left(\dfrac{\omega(1+\omega)}{\tau(1+\omega^2)}A-\dfrac{\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}BQ^{-1}B^{\mathrm{T}}\right)u+\dfrac{\omega(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}Bv\right]\\ \left(1-\dfrac{\tau\omega}{1+\tau^2}\right)B^{\mathrm{T}}u+\dfrac{\tau}{1+\tau^2}Qv=\lambda\left[-\dfrac{\tau\omega}{1+\tau^2}B^{\mathrm{T}}u+\dfrac{\tau}{1+\tau^2}Qv\right]\end{cases}\tag{8}$$

从(8) 式的第二个式子解得 $\boldsymbol{v}$，代入第一个式子中，由定理 2 知，$\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$. 因此两边左乘 $\dfrac{\boldsymbol{u}^*}{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}$，得

$$\lambda^2\left[\left(\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}\right)\alpha+\left(\frac{\tau\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\right)\beta\right]+\lambda\left[\left(\tau-\frac{2\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}\right)\alpha+\left(\tau\omega+\frac{2\tau\omega^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\right)\beta\right]+\left(\frac{\omega(1+\omega)}{1+\omega^2}-\tau\right)\alpha+\left(1-\tau^2-\tau\omega-\frac{\omega\tau^2(1+\omega)}{(1+\omega^2)(1+\tau^2)}\right)\beta=0\tag{9}$$

方程(9) 的根就是定理 3 的结论.

定理 4　设 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3)$，及 α,β 均如定理 3 所定义，且定理 3 的条件成立，假设

$$\mathrm{null}(\boldsymbol{B}) \cap R\left(\frac{1+\tau^2}{\tau}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\{\boldsymbol{0}\}$$

且成立

$$\begin{cases} |\alpha_2\alpha+\beta_2\beta| < (\alpha_1+\alpha_3)\alpha+(\beta_1+\beta_3)\beta \\ |\alpha_3\alpha+\beta_3\beta| < \alpha_1\alpha+\beta_1\beta \end{cases}$$

则对任意正数 ω,τ，求解奇异鞍点问题(1)的GPHSS-GSOR迭代法半收敛到其广义逆解.

证 假设 $\lambda \neq 1$ 是迭代矩阵 $\boldsymbol{T}(\omega,\tau)$ 的一个特征值，由定理3知 $\alpha_1\alpha+\beta_1\beta>0$，在(9)式两边除以 $\alpha_1\alpha+\beta_1\beta$，得

$$\lambda^2+\lambda\frac{\alpha_2\alpha+\beta_2\beta}{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta}+\frac{\alpha_3\alpha+\beta_3\beta}{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta}=0$$

由文献[6]的引理3，我们知道GPHSS-GSOR方法的谱半径小于1当且仅当

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\alpha_3\alpha+\beta_3\beta}{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta}\right| < 1 \\ \left|\dfrac{\alpha_2\alpha+\beta_2\beta}{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta}\right| < 1+\dfrac{\alpha_3\alpha+\beta_3\beta}{\alpha_1\alpha+\beta_1\beta} \end{cases} \tag{10}$$

由(10)式，经过简单计算并结合文献[6]的第3节内容知，求解奇异鞍点问题(1)的GPHSS-GSOR方法是半收敛的.

3 数值实验

接下来，我们用文献[8]中的例子来验证GPHSS-GSOR迭代法的有效性. 令矩阵

$$\boldsymbol{Q}=10\cdot\mathrm{blkdiag}(\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2)$$

由于迭代法的收敛速度由迭代矩阵的谱半径决定，因此，我们对当 $\omega=0.335$，$\tau=0.02$ 时的GPHSS-GSOR迭代法与GPHSS迭代法、PHSS-SOR迭代法的最优情形的谱半径进行了比较(实验数据均为10以内的最优参数)，并把相应的数值结果在表1中列出. 从表1可以看出，当参数 $\omega=0.335$，$\tau=0.02$ 时，GPHSS-GSOR迭代的谱半径比GPHSS迭代法和PHSS-SOR迭代法的最优参数时的谱半径小.

表1 不同矩阵维数下的谱半径比较

		$p=16$	$p=24$	$p=32$	$p=40$	$p=48$	$p=64$
GPHSS	α_{opt}	9.989	9.998	9.998	9.996	9.998	9.999
	β_{opt}	9.999	9.996	9.999	9.998	9.997	9.999
	ρ_{opt}	0.181 8	0.181 8	0.181 8	0.181 8	0.181 8	0.181 8
PHSS-SOR	α_{opt}	0.461	0.458	0.458	0.455	0.454	0.443
	ρ_{opt}	0.829 9	0.829 3	0.829 1	0.828 8	0.828 6	0.828 3
GPHSS-GSOR	ω	0.335	0.335	0.335	0.335	0.335	0.335
	τ	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	ρ	0.104 0	0.101 5	0.099 9	0.099 4	0.098 1	0.097 3

参考文献:

[1] BENZI M, GOLUB G H, LIESEN J. Numerical Solution of Saddle Point Problems [J]. Acta Numerica, 2005, 14(1): 1-137.

[2] BAI Zhong-zhi, WANG Zeng-qi. On Parameterized Inexact Uzawa Methods for Generalized Saddle Point Problems [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 428(11): 2900-2932.

[3] BAI Zhong-zhi, PARLETT B N, WANG Zeng-qi. On Generalized Successive Overrelaxation Methods for Augmented Linear Systems [J]. Numerische Mathematik, 2005, 102(1): 1-38.

[4] BAI Zhong-zhi, LI Gui-qing. Restrictively Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Systems of Linear Equations

[J]. IMA Journal of Numerical Analysis，2003，23(4)：561－580.
[5] BAI Zhong-zhi. Structured Preconditioners for Nonsingular Matrices of Block Two-by-Two Structures [J]. Mathematics of Computation，2006，75：791－815.
[6] ZHANG Guo-feng，WANG Shan-shan. A Generalization of Parameterized Inexact Uzawa Method for Singular Saddle Point Problems [J]. Applied Mathematics and Computation，2013，219(9)：4225－4231.
[7] WANG Shan-shan，ZHANG Guo-feng. Preconditioned AHSS Iteration Method for Singular Saddle Point Problems [J]. Numerical Algorithms，2013，63(3)：521－535.
[8] ZHENG Bin，BAI Zhong-zhi，YANG Xi. On Semi-Convergence of Parameterized Uzawa Methods for Singular Saddle Point Problems [J]. Linear Algebra and Its Applications，2009，431(5)：808－817.
[9] 潘春平. 关于鞍点问题的预处理 HSS-SOR 交替分裂迭代方法 [J]. 高校应用数学学报，2012，27(4)：456－464.
[10] 雍龙泉. 迭代法求解实对称矩阵绝对值方程 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(5)：32－37.
[11] 胡　枫，金远平. SOR 最优松弛因子选取方法研究 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(5)：48－50.
[12] ZHANG Nai-min，LU T T，WEI Yi-min. Semi-Convergence Analysis of Uzawa Methods for Singular Saddle Point Problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2014，255：334－345.

The Semi-Convergence of the GPHSS-GSOR Method for Singular Saddle Point Problems

ZENG Min-li，　LIN Ze-an，　LIN Zhi-qi

College of Mathematics，Putian University，Putian Fujian 351100，China

Abstract：Based on the Hermitian and skew-Hermitian splitting (HSS) iterative method and the generalized SOR (GSOR) iterative method，the PHSS-SOR iterative method for solving nonsingular saddle point problems is extended as a generalized PHSS-SOR (GPHSS-GSOR) iterative method. The new method is used to solve the singular saddle point problems. The semi-convergence of the GPHSS-GSOR for solving the singular saddle point problems is studied in detail. Numerical experiments are used to test the validity of the new method.

Key words：singular saddle point problems；iterative method；semi-convergence

责任编辑　廖　坤