

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.07.013

一类具有修正的 Crowley-Martin 功能函数的捕食-食饵模型的研究^①

周 军

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一类具有修正的 Crowley-Martin 功能函数的捕食-食饵模型, 给出了一个新的持续性条件并在一些特殊的条件下研究了正平衡解的全局稳定性. 该结果推广了已有的相关结论.

关键词: 捕食-食饵模型; 修正的 Crowley-Martin 功能函数; 全局渐近稳定

中图分类号: O175.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)07-0089-06

利用微分方程来研究种群模型是近年来生物数学研究的一个热门话题^[1-5]. 本文研究如下一类具有修正的 Crowley-Martin 功能函数的捕食-食饵模型:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \left(1 - u - \frac{v}{(1+Au)(1+Bv)} \right) = F(u, v), t > 0, \\ \frac{dv}{dt} &= Cv \left(1 - \frac{Dv}{u+E} \right) = G(u, v), t > 0 \\ u(0) &= u_0, v(0) = v_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中: A, B, C, D, E 均为正常数, 其生物学意义可参见文献[1]. 文献[1]研究了有界正不变集的存在性和吸引性, 正平衡解的局部和全局渐近行为, 周期解的存在性和不存在性以及该系统的持续性. 令 $F = (F_1, F_2)$, $R(u, v) = (1+Au)(1+Bv)$. 显然系统(1)具有如下 3 个平衡点:

$$E_0(0, 0), E_1(1, 0), E_2\left(0, \frac{E}{D}\right)$$

如果不等式

$$E < EB + D \quad (2)$$

和如下 3 个不等式之一

$$B + AD + ABE > AB, D + EB + 1 > B + AD + ABE \quad (3)$$

$$B + AD + ABE > AB, D + EB + 1 < B + AD + ABE \quad (4)$$

$$B + AD + ABE < AB, D + EB + 1 < B + AD + ABE \quad (5)$$

成立, 则系统(1)有唯一的正平衡点 $E^* = (u^*, v^*)$, 其中

$$u^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{c_1}{3}, v^* = \frac{E + u^*}{D}$$

① 收稿日期: 2014-03-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201380); 中央高校基本科研业务费项目(XDJK2015A16).

作者简介: 周 军(1981-), 男, 四川成都人, 副教授, 主要从事偏微分方程和动力系统的研究.

$$c_1 = \frac{B - AB + AD + ABE}{AB}, c_2 = \frac{D - B - AD + BE - ABE + 1}{AB}$$

$$c_3 = \frac{E - D - BE}{AB}, p = c_2 - \frac{c_1^2}{3}, q = \frac{c_1}{27}(2c_1^2 - 9c_2) + c_3 \quad (6)$$

本文总假设条件(H) 成立:

(H) (2) 式成立并且(3) - (5) 式之一成立.

现在引用文献[1] 中关于持续性和全局稳定性的若干结果:

1) 若条件(H) 成立, 如果如下条件成立:

$$Av^* (1 + bv^*) - R(u^*, v^*)^2 < \frac{1 + Au^*}{D}, C > C^* = u^* \left(\frac{Av^*}{(1 + Au^*)^2 (1 + Bv^*)} - 1 \right) \quad (7)$$

则 E^* 局部渐近稳定.

2) 系统(1) 是持续的如果如下条件成立:

$$E < EB + D \quad (8)$$

3) 假设(H) 和(7) 式成立, 如果如下两个条件之一成立:

$$A(1 - C) < 1 \quad (9)$$

$$A \leq B + \frac{D}{E + 1} \quad (10)$$

则 E^* 全局渐近稳定.

4) 假设(H) 和(7) 式成立, 如果

$$\frac{Av^*}{(1 + Au^*)(1 + Bv^*)} < \frac{E + 2}{E + 1} \quad (11)$$

并且以下两个条件之一成立:

$$(i) 4D^2 \leq \frac{2E + 1}{E(3E + 1)}, \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1}{4D^2 E} \right) \geq Q;$$

$$(ii) 4D^2 > \frac{2E + 1}{E(3E + 1)}, \frac{1}{E + 1} \left(1 - \frac{1}{4D^2 (E + 1)} \right) \geq Q,$$

则 E^* 全局渐近稳定, 其中

$$Q = \frac{Av^*}{E(1 + Au^*)} + \frac{1}{4(1 + Bv^*)^2} - \frac{1}{2(1 + A)(1 + E)(D + B(1 + E))(1 + Bv^*)}$$

注 1 因为(7), (11) 式和 Q 很难计算, 利用 3) 或 4) 很难判定 E^* 的全局渐近稳定性. 本文将继续研究系统(1) 的持续性和 E^* 的全局渐近稳定性. 我们将给出持续性的一个新的判定条件(定理 3) 和一些判定 E^* 全局渐近稳定的具体条件(定理 4 和推论 1).

首先我们给出持续性的定义如下:

定义 1^[1, 6] 系统(1) 被称为是持续的, 如果存在正常数 M_1 和 M_2 使得系统(1) 的解 $(u(t), v(t))$ 满足:

$$M_1 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq M_2$$

$$M_1 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq M_2$$

为了得到持续性条件, 我们首先给出系统(1) 解的一个耗散性结果(证明可参见文献[1]).

定理 1 设 $(u(t), v(t))$ 是系统(1) 的解, 则如下估计成立:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq 1, \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \frac{1 + E}{D}$$

下面我们给出系统(1) 的持续性结果. 从生物学的观点来看, 这意味着该系统的两种群总是共存的^[6].

定理 2 设 $(u(t), v(t))$ 是系统(1) 的解, 如果

$$E + 1 - B < EB + d \quad (12)$$

则有

$$\begin{aligned}\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) &\geq \frac{D + (B-1)(E+1)}{D + B(E+1)} > 0 \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) &\geq \frac{(D + B(E+1) - 1)(E+1)}{D(D + B(E+1))} > 0\end{aligned}\quad (13)$$

定理 2 的证明依赖于如下方程解的渐近行为:

$$\omega_t = r\omega \left(1 - \frac{\omega}{K}\right), \quad t > 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0 \quad (14)$$

其中 r, K 和 ω_0 是正常数. 由文献[6-7]可知如下结论成立:

引理 1 (14) 式的解 $\omega(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = K$.

定理 2 的证明 由系统(1)的第一个方程可知 $u_t \leq u + u(1-u)$, $t > 0$, 所以由比较原理^[7]和引理 1 知: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 t_1 使得如下不等式成立:

$$u(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad t \geq t_1 \quad (15)$$

由系统(1)的第二个方程和(15)式可知 $v_t \leq Cv \left(1 - \frac{Dv}{1 + \varepsilon + E}\right)$, $t \geq t_1$. 因此, 存在正数 $t_2 \geq t_1$ 使得如下不等式成立:

$$v(x, t) \leq \frac{1 + \varepsilon + E}{D} + \varepsilon, \quad t \geq t_2 \quad (16)$$

由系统(1)的第一个方程和(15)式可知

$$u_t \geq u \left(1 - \frac{\bar{v}}{1 + B\bar{v}} - u\right), \quad t \geq t_2$$

其中 $\bar{v} = \frac{1 + \varepsilon + E}{D} + \varepsilon$. 因为(12)式成立, 我们可以选取 ε 充分小使得不等式 $1 - \frac{\bar{v}}{1 + B\bar{v}} > \varepsilon$ 成立. 因此存

在正数 $t_3 \geq t_2$ 使得如下不等式成立:

$$u \geq \underline{u} = 1 - \frac{\bar{v}}{1 + B\bar{v}} - \varepsilon > 0, \quad t \geq t_3 \quad (17)$$

从而由系统(1)的第二个方程和(17)式可知 $v_t \geq Cv \left(1 - \frac{Dv}{\underline{u} + E}\right)$, $t \geq t_3$. 因此存在正数 $t_3 \geq t_2$ 使得如下不等式对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立:

$$v \geq \frac{\underline{u} + E}{D} - \varepsilon > 0 \quad (18)$$

利用(17)式和(18)式, 我们可以得到(13)式.

最后, 利用定理 1 和定理 2, 根据定义 1, 我们可以得到如下的持续性结论:

定理 3 如果条件(12)成立, 则系统(1)是持续的.

注 2 文献[1]得到系统(1)是持续的, 如果(8)式成立. 在 $B > 1$ 的条件下, (12)式优于(8)式.

下面我们将利用迭代方法研究 E^* 的全局稳定性. 首先我们定义函数 $F(\alpha, \beta)$ 如下:

$$\begin{aligned}F(\alpha, \beta) &= A^2 B^2 \alpha^2 + AB(D + BE)\beta^2 + AB(B + A(D + BE))\alpha\beta + (B^2 + A^2(D + BE)^2 - AB)\alpha + \\ &\quad (D + BE)(B + A(D + BE - 1))\beta + (D + BE)^2 - AE(D + BE) - D\end{aligned}\quad (19)$$

定理 4 假设(H)和(12)式成立, 如果方程 $F(\alpha, \beta) = 0$ 在 $(\underline{\alpha}, 1) \times (\underline{\beta}, 2)$ 中无解, 则 E^* 是全局渐近稳定的, 其中

$$\underline{\alpha} = \left[\frac{D + (B-1)(E+1)}{D + B(E+1)} \right]^2, \quad \underline{\beta} = \frac{2(D + (B-1)(E+1))}{D + B(E+1)} \quad (20)$$

证 定义两个函数 $\Phi(s, t)$ 和 $\Psi(t)$ 如下:

$$\Phi(s, t) = 1 - \frac{t}{(1 + As)(1 + Bt)}, \quad \Psi(s) = \frac{s + E}{D}, \quad s > 0, \quad t > 0$$

经计算可知 $\Phi(s, t)$ 关于 s 严格增且关于 t 严格减, $\Psi(t)$ 关于 s 严格增. 定义 4 个序列 $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty, \{\underline{u}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\underline{v}_n\}_{n=1}^\infty$ 如下:

$$\begin{aligned} \underline{u}_n &= \begin{cases} \frac{D + (B-1)(E+1)}{D + B(E+1)} & n=1; \\ \Phi(\underline{u}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}) & n \geq 2 \end{cases} \\ \bar{u}_n &= \begin{cases} 1 & n=1; \\ \Phi(\bar{u}_{n-1}, \bar{v}_{n-1}) & n \geq 2 \end{cases} \\ \underline{v}_n &= \Psi(\underline{u}_n) & \bar{v}_n &= \Psi(\bar{u}_n) \end{aligned}$$

下面证明 $\{\bar{u}_n\}_{n=1}^\infty, \{\underline{u}_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{v}_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{\underline{v}_n\}_{n=1}^\infty$ 满足:

- (a) $\underline{u}_1 < \underline{u}_2 < \cdots < \underline{u}_n < \bar{u}_n < \cdots < \bar{u}_2 < \bar{u}_1$;
- (b) $\underline{v}_1 < \underline{v}_2 < \cdots < \underline{v}_n < \bar{v}_n < \cdots < \bar{v}_2 < \bar{v}_1$;
- (c) $\underline{u}_n \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \bar{u}_n$;
- (d) $\underline{v}_n \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \bar{v}_n$.

事实上, 利用 $\Phi(s, t)$ 和 $\Psi(s)$ 的单调性可知 (a) 和 (b) 成立当且仅当如下不等式成立:

$$\underline{u}_1 < \underline{u}_2 < \bar{u}_2 < \bar{u}_1 \quad (21)$$

经一系列计算可知

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \frac{D + (B-1)(E+1)}{D + \left(B - \frac{A}{A+1}\right)(E+1)} \\ \underline{v}_1 &= \frac{(E+1)(D + B(E+1) - 1)}{D(D + B(E+1))} & \bar{v}_1 &= \frac{1+E}{D} \end{aligned}$$

于是 $\underline{u}_1 < \underline{u}_2, \underline{v}_1 < \bar{v}_1$. 由 $\Phi(s, t)$ 的定义可知 $\bar{u}_2 < 1 = \bar{u}_1$. 利用 $\underline{u}_1 < \bar{u}_1, \underline{v}_1 < \bar{v}_1$ 和 $\Phi(s, t)$ 的单调性可知 $\underline{u}_2 < \bar{u}_2$. 所以 (21) 式成立, 从而 (a) 和 (b) 成立.

下面我们用归纳法证明 (c) 和 (d) 成立. 设 $(u(t), v(t))$ 是系统 (1) 的解, 利用定理 1 和定理 2 可知

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \bar{u}_1 \\ \underline{v}_1 &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \bar{v}_1 \end{aligned}$$

所以当 $n=1$ 时 (c) 和 (d) 成立. 下面我们假设 (c) 和 (d) 对 $n=k$ 成立, 即

$$\begin{aligned} \underline{u}_k &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \bar{u}_k \\ \underline{v}_k &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \bar{v}_k \end{aligned} \quad (22)$$

并证明 (c) 和 (d) 对 $n=k+1$ 成立. 对于确定的充分小正数 ε , 由 (22) 式可知存在正数 $T_1 \gg 1$ 使得对 $t \geq T_1$ 有如下关系:

$$0 < \underline{u}_k - \varepsilon \leq u(t) \leq \bar{u}_k + \varepsilon, \quad 0 < \underline{v}_k - \varepsilon \leq v(t) \leq \bar{v}_k + \varepsilon \quad (23)$$

利用 (23) 式可知对 $t \geq T_1$ 有

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(\Phi(u, v) - u) \geq u(\Phi(\underline{u}_k - \varepsilon, \bar{v}_k + \varepsilon) - u) \\ \frac{du}{dt} &= u(\Phi(u, v) - u) \leq u(\Phi(\bar{u}_k + \varepsilon, \underline{v}_k - \varepsilon) - u) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{CDv}{u+E}(\Psi(u) - v) \geq \frac{CDv}{u+E}(\Psi(\underline{u}_k - \varepsilon) - v) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{CDv}{u+E}(\Psi(u) - v) \leq \frac{CDv}{u+E}(\Psi(\bar{u}_k + \varepsilon) - v) \end{aligned}$$

所以利用引理 1 和比较原理^[7] 有

$$\Phi(\underline{u}_1 + \varepsilon, \underline{v}_k - \varepsilon) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \Phi(\underline{u}_k - \varepsilon, \overline{v}_k + \varepsilon)$$

$$\Psi(\underline{u}_k - \varepsilon) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t) \leq \Psi(\overline{u}_k + \varepsilon)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可知(c) 和(d) 成立.

利用 $\{\underline{u}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\underline{u}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\overline{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\underline{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的单调性, 我们假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n = \underline{u}, \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{u}_n = \overline{u}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{v}_n = \underline{v}, \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{v}_n = \overline{v}$$

其中 $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v}$ 是满足如下关系的 4 个常数:

$$(i) \underline{u}_1 < \underline{u} \leq \overline{u} < \overline{u}_1, \underline{v}_1 < \underline{v} \leq \overline{v} < \overline{v}_1.$$

$$(ii) \underline{u} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u(t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u(t) \leq \overline{u}.$$

$$(iii) \underline{v} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v(t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} v(t) \leq \overline{v}.$$

$$(iv) \underline{u} = \Phi(\underline{u}, \overline{v}), \overline{u} = \Phi(\overline{u}, \underline{v}), \underline{v} = \Psi(\underline{u}), \overline{v} = \Psi(\overline{u}).$$

由 (iv) 可知

$$\begin{aligned} \underline{u} &= 1 - \frac{\overline{u} + E}{(1 + A\underline{u})(D + B(\overline{u} + E))} \\ \overline{u} &= 1 - \frac{\underline{u} + E}{(1 + A\overline{u})(D + B(\underline{u} + E))} \end{aligned} \quad (24)$$

从而由(24) 式可知

$$\begin{aligned} \overline{u} - \underline{u} &= \frac{\overline{u} + E}{(1 + A\underline{u})(D + B(\overline{u} + E))} - \frac{\underline{u} + E}{(1 + A\overline{u})(D + B(\underline{u} + E))} = \\ &= \frac{AB\underline{u}\overline{u}(\overline{u} - \underline{u}) + A(D + BE)(\overline{u} + \underline{u})(\overline{u} - \underline{u}) + (D + AE(D + BE))(\overline{u} - \underline{u})}{(1 + A\underline{u})(1 + A\overline{u})(D + B(\underline{u} + E))(D + B(\overline{u} + E))} \end{aligned} \quad (25)$$

下面我们利用反证法证明 $\overline{u} = \underline{u}$. 假设 $\overline{u} \neq \underline{u}$, 则由(25) 式可知

$$1 = \frac{AB\underline{u}\overline{u} + A(D + BE)(\overline{u} + \underline{u}) + (D + AE(D + BE))}{(1 + A\underline{u})(1 + A\overline{u})(D + B(\underline{u} + E))(D + B(\overline{u} + E))} \quad (26)$$

(26) 式等价于 $F(\underline{u}\overline{u}, \underline{u} + \overline{u}) = 0$, 其中 F 的定义可参见(19) 式. 由 (i) 可知 $(\underline{u}\overline{u}, \underline{u} + \overline{u}) \in (\underline{\alpha}, 1) \times (\underline{\beta}, 2)$, 这和方程 $F(\alpha, \beta) = 0$ 在 $(\underline{\alpha}, 1) \times (\underline{\beta}, 2)$ 中无解矛盾. 所以 $\overline{u} = \underline{u}$, 从而 $\overline{v} = \Psi(\overline{u}) = \Psi(\underline{u}) = \underline{v}$, 该关系结合 (iv) 可知 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是系统(1) 的正平衡点. 因为在假设(H) 下, 系统(1) 只有唯一的平衡点 E^* , 所以 $\overline{u} = \underline{u} = u^*$, $\overline{v} = \underline{v} = v^*$, 结合 (ii) 和 (iii) 可知 E^* 全局渐近稳定.

利用定理 4 我们可以得到如下推论:

推论 1 假设(H) 和(12) 式成立, 如果以下 3 个条件之一成立, E^* 全局渐近稳定:

$$\begin{cases} D + BE < \frac{1}{2}, A \leq \frac{B(1 - \sqrt{1 - 4(D + BE)^2})}{2(D + BE)^2} \\ A \leq \frac{B}{1 - (D + BE)}, A \leq B + \frac{D}{E} \left(1 - \frac{1}{D + BE}\right) \end{cases} \quad (27)$$

$$\frac{1}{2} \leq D + BE < 1, A \leq \frac{B}{1 - (D + BE)}, A \leq B + \frac{D}{E} \left(1 - \frac{1}{D + BE}\right) \quad (28)$$

$$D + BE \geq 1, A \leq B + \frac{D}{E} \left(1 - \frac{1}{D + BE}\right) \quad (29)$$

证 由定理 4 我们只需证明 $F(\alpha, \beta) > 0$. 因为 $(\alpha, \beta) \in (\underline{\alpha}, 1) \times (\underline{\beta}, 2)$, $F(\alpha, \beta) > 0$ 的充分条件是

$$\begin{cases} (D + BE)^2 A^2 - BA + B^2 \geq 0 \\ (D + BE - 1)A + B \geq 0 \\ -E(D + BE)A + (D + BE)^2 - D \geq 0 \end{cases} \quad (30)$$

经计算可知(27) – (29) 式之一成立, (30) 式成立.

参考文献:

- [1] ALI N, JAZAR M. Global Dynamics of a Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Responses [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2013, 43: 1069–1075.
- [2] 郭改慧, 李兵方, 岳宗敏. 带交叉扩散的 Ivlev 捕食-食饵模型的分歧正解 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(1): 1–5.
- [3] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [4] 谈骏渝. 一类扩散方程的初边值问题及其应用 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(1): 11–14.
- [5] 周 军. 一类具有修正的 Leslie-Gower 功能函数的捕食-食饵模型的全局渐近稳定性 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2014, 36(7): 1–5.
- [6] MURRAY J D. Mathematical Biology I: An Introduction [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [7] HSU S B. Ordinary Differential Equations with Applications [M]. Singapore: World Scientific, 1998.

A Study of a Modified Leslie-Gower Prey-Predator Model with Crowley-Martin Functional Responses

ZHOU Jun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we revisit a modified Leslie-Gower prey-predator model with Crowley-Martin functional responses, which was studied by Ali and Jazar in [1]. We give a new permanence condition and some specific globally asymptotically stable conditions for the unique positive equilibrium of the model.

Key words: prey-predator model; Crowley-Martin functional response; global asymptotic stability

责任编辑 张 桢

