DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.07.016

四阶 Schrödinger 方程的动态分歧[①]

代文霞，　朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 对具有 Dirichlet 边界条件的四阶 Schrödinger 方程给出了分歧分析，证明了当参数 λ 穿过第一临界值 $\lambda=\alpha\lambda_1$ 时，该问题分歧出一个吸引子. 该分析以最近创立的新的吸引子分歧理论为基础，同时运用了特征值分析和中心流形约化方法.

关 键 词： 四阶 Schrödinger 方程；分歧；Dirichlet 边界条件

中图分类号：O175.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2015)07－0111－06

本文将考虑在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n\,(1 \leqslant n \leqslant 3)$ 具有 Dirichlet 边界条件的四阶 Schrödinger 方程的不变集和吸引子的分歧：

$$\begin{cases} u_t - (\alpha + \mathrm{i}\beta)\Delta u + (\alpha + \mathrm{i}\beta)\Delta^2 u + (\sigma + \mathrm{i}\rho)\,|\,u\,|^4 u - \lambda u = 0 & x \in \Omega^n,\ t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,\ 0) = \phi + \mathrm{i}\psi & x \in \Omega^n \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中：未知函数 $u: \Omega \times [0,\ \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ 是复值函数；$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开有界光滑的区域；参数 α，β，σ，ρ 是实数，并且 $\alpha > 0$，$\sigma > 0$.

1　基本理论

众所周知，非线性 Schrödinger 方程一直是数学物理学科重要研究课题之一，该方程又称非线性 Schrödinger 波动方程，这个方程是奥地利物理学家 Schrödinger 于 1926 年提出的，它是量子力学最基本的方程之一，它揭示了微观物理世界物质运动的基本规律. 在量子力学中，体系的状态不能用力学量的值来确定，而是要用力学量的函数 $u(x,\ t)$ 即波函数来确定，因此波函数成为量子力学研究的主要对象，力学量取值的概率分布如何，这个分布随时间如何变化，这些问题都可以通过求解波函数的 Schrödinger 方程得到解答. 同时非线性 Schrödinger 方程作为非线性波的基本模型在物理学许多领域广泛应用，并且是表述非线性波列在非线性、强色散、双曲系统中慢变振幅现象的一般方程[1]. 四阶非线性 Schrödinger 方程是考虑四阶色散项在带有 Kerr 非线性特征的强激光束在大量介质传播中所起的作用中提出的[2-3]. 该方程的物理模型出现在物理学的许多领域，如非线性光学、等离子物理、超导体和量子力学等[4-6]. 很多学者对四阶非线性 Schrödinger 方程做了大量的研究[2-3, 7-11].

① 收稿日期：2014－10－22
基金项目：国家自然科学基金(61273020)，重庆市博士后科研项目特别资助(渝 XM201102006).
作者简介：代文霞(1989－)，女，山东郓城人，硕士研究生，主要从事非线性偏微分方程理论及其应用研究.
通信作者：朱朝生，副教授.

本文研究四阶Schrödinger方程的动态分歧. 动态分歧理论的基本原理主要来源于文献[12－13]，其中文献[12]介绍了非线性发展方程的动态分歧，文献[13]介绍了动态分歧理论及其在Ginzburg-Landau方程中的应用. 本文将利用文献[12－13]的基本原理证明问题(1)吸引子的分歧结果. 为此下面我们首先简述本文有关的一些吸引子分歧的基本理论.

令 H 和 H_1 是两个 Hilbert 空间，$H_1 \cup H$ 是紧稠密包含，考虑下面非线性演化方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=L_{\lambda}u+G(u,\lambda) \tag{2}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3}$$

其中 $u:[0,\infty)\longrightarrow H$ 是未知函数，$\lambda\in\mathbb{R}^1$ 是一个参数，$L_{\lambda}:H_1\longrightarrow H$ 是连续依赖于参数 $\lambda\in\mathbb{R}^1$ 的线性全连续场，它满足

$$\begin{cases} L_{\lambda}=-A+B_{\lambda} & \text{是一个扇形算子} \\ A:H_1\longrightarrow H & \text{是一个线性同胚} \\ B_{\lambda}:H_1\longrightarrow H & \text{是一个参数化的线性紧算子} \end{cases} \tag{4}$$

很容易得到 L_{λ} 产生一个解析半群$\{\mathrm{e}^{-tL_{\lambda}}\}_{t\geqslant 0}$. 在内插空间 $H_{\alpha}=D(L_{\lambda}^{\alpha})$ 中，对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，我们可以定义一个分数指数算子 L_{λ}^{α}，即，如果 $\alpha_1>\alpha_2$，那么 $H_{\alpha_1}\subset H_{\alpha_2}$，并且有 $H_0=H$.

对某个 $0\leqslant\alpha<1$，假定非线性项 $G(\cdot,\lambda):H_{\alpha}\longrightarrow H$ 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 的有界映射，连续地依赖于 $\lambda\in\mathbb{R}^1$，并且满足 $G(u,\lambda)=o(\|u\|_{H_{\alpha}})$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}^1$，这里 H_{α} 为扇形算子 L_{λ} 决定的分数次空间.

事实上，在本文中，对于算子 $L_{\lambda}=-A+B_{\lambda}$，要确定 L_{λ} 是一个扇形算子，需要满足以下条件：

取 A 的一个特征值序列$\{\rho_k\}\subset\mathbb{C}$和一个特征向量序列$\{e_k,h_k\}\subset H_1$，满足条件

$$\begin{cases} Az_k=\rho_k z_k,\ z_k=e_k+\mathrm{i}h_k & \\ \mathrm{Re}\,\rho_k\to\infty,\ \mathrm{Re}\,\rho_k & k\to\infty \\ \mathrm{Re}\,\rho_k+a\ |\leqslant C & a\ \text{是常数},\ C>0 \end{cases} \tag{5}$$

其中$\{e_k,h_k\}$是 H 的一组基.

(5) 式指出 A 是一个扇形算子. 因此，在区域 $H_{\alpha}=D(A^{\alpha})$ 内，定义分数次幂算子 A^{α}，对于算子 $B_{\lambda}:H_1\longrightarrow H$，我们假设存在一个常数 $0\leqslant\theta<1$，使得 $B_{\lambda}:H_1\longrightarrow H$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}^1$ 有界. 令$\{S_{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$为一个由(2)式产生的算子半群，则$\{S_{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}$有如下性质：

1) 对 $\forall t\geqslant 0$，$\{S_{\lambda}(t)\}_{t\geqslant 0}:H\longrightarrow H$ 是一个线性连续算子.

2) $S_{\lambda}(0)=I:H\longrightarrow H$ 是 H 上的恒等算子.

3) 对 $\forall t,s\geqslant 0$，$S_{\lambda}(t+s)=S_{\lambda}(t)\cdot S_{\lambda}(s)$.

则(2)和(3)的解可以表示为 $u(t)=S_{\lambda}(t)u_0$，$t\geqslant 0$.

定义 1 称集合 $\Sigma a\subset H$ 为(2)式的不变集，如果对 $\forall t\geqslant 0$，$S(t)\Sigma a=\Sigma a$. 称不变集 $\Sigma a\subset H$ 是(2)式的一个吸引子，如果 Σa 是紧的，且存在 Σa 的领域 $U\subset H$，使得对任意的 $\varphi\in U$ 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}_u(u(t,\varphi),\Sigma a)=0 \tag{6}$$

满足(6)式的最大开集 U 被称为 Σa 的吸引域.

定义 2 1) 我们称(2)式从$(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$分歧出一个不变集 Ω_{λ}，如果存在(2)式的一个不变集序列$\{\Omega_{\lambda_n}\}$，且 $0\notin\Omega_{\lambda_n}$，使得：

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_0,\ \lim_{n\to\infty}\max_{x\in\Omega_{\lambda_n}}|x|=0$$

2) 如果这些不变集 Ω_{λ} 是(2)式的吸引子，则称这种分歧为吸引子分歧.

3) 如果(2)式从$(0,\lambda_0)$分歧出的吸引子 Ω_{λ} 与 m 维球面 S^m 有相同的同调群，则称(2)式从$(0,\lambda_0)$处

有一个 S^m 吸引子分歧，并称 Ω_λ 为分歧出的 m 维同调球，特别地，若 Ω_λ 与球面 S^m 同胚，则称 Ω_λ 为分歧出的 S^m 球面吸引子.

2　吸引子分歧

下面我们将利用上面介绍的吸引子分歧基本原理研究问题(1). 为此，引入下面记号：

$$H^k(\Omega, \mathbb{C}) = \{u_1 + \mathrm{i}u_2 \mid u_j \in H^k(\Omega),\ j = 1,2\}$$

$$H_0{}^1(\Omega, \mathbb{C}) = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \mid \partial\Omega = 0\}$$

其中 H^k 是一般的实值 Sobolev 空间，令 λ_1 是 $-(\Delta - \Delta^2)$ 关于 Dirichlet 边界条件的第一个特征值.

本文将要证明的主要结果如下：

定理 1　1）当 $\lambda \leqslant \alpha\lambda_1$ 时，$u = 0$ 是(1) 式的一个全局渐进稳定的平衡点.

2）当 λ 穿过 $\alpha\lambda_1$ 时，即 $\varepsilon > 0$ 时，对任意 $\alpha\lambda_1 < \lambda < \alpha\lambda_1 + \varepsilon$，问题(1) 从 $(u, \lambda) = (0, \alpha\lambda_1)$ 分歧出一个吸引子 Σa_λ.

3）分歧吸引子 Σa_λ 的维数为 $1 \leqslant \Sigma a_\lambda \leqslant 2$，$M_k$ 为二维环形流形且 $M_{k+1} \subset M_k$，即 $\Sigma a_\lambda = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} M_k$.

4）当 $\beta \neq 0$ 时，这个分歧是一个 Hopf 分歧，即 $\Sigma a_\lambda = S^1$，它是渐进稳定的.

5）当 $\beta = 0$，$\rho \neq 0$ 时，分歧吸引子 Σa_λ 是一个周期轨道，是一个同调球.

6）对每一个 $\alpha\lambda_1 < \lambda < \alpha\lambda_1 + \varepsilon$ 分歧吸引子 Σa_λ 吸引开集 $L^2(\Omega, \mathbb{C})/\Gamma$，$\Gamma$ 的稳定流形在 $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ 中有余维 2.

证　第一步，令 $u = u_1 + \mathrm{i}u_2$，那么问题(1) 等价于如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha\Delta u_1 - \beta\Delta u_2 - \alpha\Delta^2 u_1 + \beta\Delta^2 u_2 + \lambda u_1 - \sigma \mid u \mid^4 u_1 + \rho \mid u \mid^4 u_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \beta\Delta u_1 + \alpha\Delta u_2 - \beta\Delta^2 u_1 - \alpha\Delta^2 u_2 + \lambda u_2 - \sigma \mid u \mid^4 u_2 - \rho \mid u \mid^4 u_1 \\ u_1(x, 0) = \phi(x),\ u_2(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \tag{7}$$

令 $H_1 = H^4(\Omega, \mathbb{C}) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$，$H = L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

$$-Au = \begin{pmatrix} \alpha(\Delta - \Delta^2)u_1 - \beta(\Delta - \Delta^2)u_2 \\ \beta(\Delta - \Delta^2)u_1 + \alpha(\Delta - \Delta^2)u_2 \end{pmatrix}$$

$$B_\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$Gu = \begin{pmatrix} -\sigma \mid u \mid^4 u_1 + \rho \mid u \mid^4 u_2 \\ -\sigma \mid u \mid^4 u_2 - \rho \mid u \mid^4 u_1 \end{pmatrix}$$

我们知道 $H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$. 根据 Sobolev 嵌入定理和 $1 \leqslant n \leqslant 3$，映射 $G: H_{\frac{1}{2}} \longrightarrow H$ 是 C^∞. 那么 $G(u, \lambda) = o(\| u \|_{H_\alpha})$ 成立.

令 $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ 和 $\{e_k\} \subset H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 是 $-(\Delta - \Delta^2)$ 带 Dirichlet 边界条件的特征值和特征向量

$$\begin{cases} -(\Delta - \Delta^2)e_k = \lambda_k e_k \\ e_k \mid \partial\Omega = 0 \end{cases}$$

特征值 λ_k 具有性质当 $k \to \infty$ 时

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots,\ \lambda_k \to \infty$$

并且 $\{e_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的一个正交基.

那么，我们很容易得到 A 的特征值是 $\alpha\lambda_k \pm \mathrm{i}\beta\lambda_k$，$k = 1,2,\cdots$，对应的特征向量是 $z_k = e_k + \mathrm{i}e_k$，并且

$\{e_k, \mathrm{i}e_j \mid 1 \leqslant k, j < \infty\}$ 是 H 的正交基. $L_\lambda = -A + B_\lambda$ 的特征值是

$$(\lambda - \alpha\lambda_k) \pm \mathrm{i}\beta\lambda_k, \; k = 1, 2, \cdots \tag{8}$$

此外, 空间 H 和 H_1 能够分解成

$$H_1 = E_1 \oplus E_2 \text{ 和 } H = E_1 \oplus \widetilde{E}_2$$

$$E_1 = \{x_1 e_1 + \mathrm{i}y_1 e_1 \mid x_1, y_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{\Sigma a_{k=2}^{\infty}(x_k + \mathrm{i}y_k)e_k \mid \Sigma a_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2(x_k^2 + y_k^2) < \infty\}$$

$$\widetilde{E}_2 = \{\Sigma a_{k=2}^{\infty}(x_k + \mathrm{i}y_k)e_k \mid \Sigma a_{k=2}^{\infty}(x_k^2 + y_k^2) < \infty\}$$

算子 L_λ 能够分解成

$$L_\lambda = \mathscr{L}_1^\lambda \oplus \mathscr{L}_2^\lambda$$

$$\mathscr{L}_1^\lambda = \mathscr{L}_\lambda |_{E_1}: E_1 \longrightarrow E_1, \; \mathscr{L}_2^\lambda = \mathscr{L}_\lambda |_{E_2}: E_2 \longrightarrow \widetilde{E}_2$$

根据中心流形定理, (1) 式的吸引子分岐等价于分岐方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\lambda - \alpha\lambda_1)x_1 + \beta\lambda_1 y_1 + P_1 G_1(x_1 + \mathrm{i}y_1 + h) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\beta\lambda_1 x_1 + (\lambda - \alpha\lambda_1)y_1 + P_1 G_2(x_1 + \mathrm{i}y_1 + h) \end{cases} \tag{9}$$

其中 $h = h_1 + h_2$ 是中心流形函数并且满足

$$h(x_1, y_1) = o(|x_1| + |y_1|)$$

$P_1 G_i(u)(i = 1, 2)$ 满足

$$\begin{cases} P_1 G_1(u) = \displaystyle\int_\Omega [-\sigma |u|^4 u_1 + \rho |u|^4 u_2] e_1 \mathrm{d}x \\ P_1 G_2(u) = \displaystyle\int_\Omega [-\sigma |u|^4 u_2 + \rho |u|^4 u_1] e_1 \mathrm{d}x \\ u = u_1 + \mathrm{i}u_2 = \Sigma a_{k=1}^{\infty}(x_k + \mathrm{i}y_k)e_k \end{cases} \tag{10}$$

第二步, 由(5) 式可以推导出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\alpha |\nabla u|^2 - \alpha |\Delta u|^2 + \lambda |u|^2 - \sigma |u|^6)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$-\int_\Omega [(\alpha\lambda_1 - \lambda)|u|^2 + \sigma |u|^6]\mathrm{d}x$$

所以当 $\lambda \leqslant \alpha\lambda_1$, $u = 0$ 是(2) 式的一个全局渐进稳定平衡点.

第三步, (1) 式有一个全局吸引子[14], 很显然, 对 L_λ 的特征值(6), 当 $\lambda_0 = \alpha\lambda_1$ 成立时, (2) 式从$(u, \lambda) = (0, \alpha\lambda_1)$ 分岐出一个吸引子 Σa_λ, 并吸收 H/Γ.

第四步, 现在证明 $\Sigma a_\lambda = S^1$. 当 $\beta \neq 0$ 时, 这个分岐是一个典型的 Hopf 分岐. 因此需要考虑另一种情况 $\beta = 0$. 分岐方程(7) 变成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon x + P_1 G_1(xe_1 + h_1 + \mathrm{i}ye_1 + \mathrm{i}h_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \varepsilon y + P_1 G_2(xe_1 + h_1 + \mathrm{i}ye_1 + \mathrm{i}h_2) \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\varepsilon = \lambda - \alpha\lambda_1 > 0$ 充分小. 由(8) 式有

$$P_1 G_1(x, y) = a(-\sigma x^5 + \rho y^5 - \sigma y^4 x + \rho x^4 y - 2\sigma x^3 y^2 + 2\rho x^2 y^3) + o(|x|^5 + |y|^5)$$

$$P_1 G_2(x, y) = a(-\sigma y^5 - \rho x^5 - \sigma x^4 y - \rho y^4 x - 2\sigma x^2 y^3 - 2\rho x^3 y^2) + o(|x|^5 + |y|^5)$$

其中: $u_1 = xe_1 + h_1(x, y)$, $u_2 = ye_1 + h_2(x, y)$, $a = \int_\Omega e_1{}^6 \mathrm{d}x > 0$. 所以(9) 式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon x+a(-\sigma x^5+\rho y^5-\sigma y^4 x+\rho x^4 y-2\sigma x^3 y^2+2\rho x^2 y^3)+o(|x|^5+|y|^5)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon y+a(-\sigma y^5-\rho x^5-\sigma x^4 y-\rho y^4 x-2\sigma x^2 y^3-2\rho x^3 y^2)+o(|x|^5+|y|^5)\end{cases}\tag{12}$$

由此可以看出吸引子 Σa_λ 没有非零奇点，即由(5)式得

$$\int_\Omega\left(u_2\frac{\partial u_1}{\partial t}-u_1\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega[\beta(|\nabla u|^2+|\Delta u|^2)+\rho|u|^6]\mathrm{d}x,\ |\rho|+|\beta|\neq 0$$

(1)式的奇点 $u=0$ 是唯一的，所以 Σa_λ 有 S^1 的同伦型，当 $\rho\neq 0$ 时，Σa_λ 至少包含一个周期轨道.

做极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，那么(10)式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{-\varepsilon+a\rho r^4+2a\rho r^4\cos^5\theta\sin\theta+2a\rho r^4\cos\theta\sin^5\theta+o(r^5)}{a\rho r^3}\\ r(0)=r_0\end{cases}\tag{13}$$

由(11)式得

$$\frac{a\rho}{4}(r^4(2\pi)-r^4(0))=\int_\Omega[-\varepsilon+a\rho r^4+2a\rho r^4\cos^5\theta\sin\theta+2a\rho r^4\cos\theta\sin^5\theta+o(r^5)]\mathrm{d}\theta$$

由于 $r^4=r^4(\theta,r_0)$ 关于 $r_0>0$ 是 C^∞ 的，根据泰勒公式展开得

$$r^4(\theta,r_0)=r_0^4+R(\theta)\cdot o(|r_0|^4),\ R(0)=0$$

因此

$$\frac{a\rho}{4}(r^4(2\pi)-r^4(0))=-2\pi\varepsilon+2\pi a\sigma {r_0}^4+o(|r_0|^4)$$

很明显初值 $r_0>0$ 在(11)式中满足

$$2\pi\varepsilon-2\pi a\sigma {r_0}^4+o(|r_0|^4)=0\tag{14}$$

与(10)式的周期轨道有关. 很容易得到(12)式在 $r_0=0$ 的解 ${r_0}^2$ 是唯一的. 因此当 $\rho\neq 0$ 时，Σa_λ 是一个周期轨道. 定理 1 证毕.

参考文献：

[1] BANG O, CHRISTIANSEN P L, RASMUSSEN F K. White Noise in the Two-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Appl Anal, 1995, 57: 3－15.

[2] KARPMAN V I. Stabilization of Soliton Instabilities by Higher-Order Dispersion: Fourth Order Nonlinear Schrödinger Type Equations [J]. Phys Rev E, 1996, 53(2): 1336－1339.

[3] KARPMAN V I, SHAGALOV A G. Stabilization of Soliton Described by Nonlinear Schrödinger-Type Equations with Higher Order Dispersion [J]. Phys D, 2000, 144: 194－210.

[4] ABLOWITZ M, SEGUR H. Solitons and the Inverse Scattering Transform [M]. Philadelphia: SIAM, 1981.

[5] HIROTA R. Direct Methods in Soliton Theory [M]. Berlin: Springer, 1980.

[6] LIU S, FU Z, LIU S, et al. Stationary Periodic Solutions and Asymptotic Series Solutions to Nonlinear Evolution Equations [J]. Chinese J Phys, 2004, 42(2): 127－134.

[7] BEN-ARTZI M, KOCH H, SAUT J C. Dispersion Estimates for Fourth Order Schrödinger Equations [J]. C R Math Acad Sci Ser, 2000, 330(1): 87－92.

[8] FIBICH G, ILAN B, PAPANICOLAOU G. Self-Focusing with Fourth Order Dispersion [J]. SIAM J Appl Math, 2002, 62(4): 1437－1462.

[9] GUO B, WANG B. The Global Cauchy Problem and Scattering of Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations in H8 [J]. Dierential Integral Equations, 2002, 19(9): 1073－1083.

[10] HAO C, HSIAO L, WANG B. Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Fourth-Order Schrödinger Equations in

High Dimensions [J]. Math Anal, 2007, 328: 58－83.

[11] WAZWAZ A M. Exact Solutions for the Fourth Order Nonlinear Schrödinger-Type Equations with Cubic and Power Law Nonlinearities [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43(7－8): 802－808.

[12] MA T, WANG S H. Dynamic Bifurcation of Nonlinear Evolution Equations [J]. Chin Ann Math, 2005, 26(2): 185－206.

[13] MA T, JUNGHO P, SHOUHONG W. Dynamic Bifurcation of the Ginzburg-Landau Equation [J]. SIAM J. Applied Dynamical Systems, 2004, 4(3): 620－635.

[14] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. Berlin: Springer, 1997.

Dynamic Bifurcation of the Four-Order Schrödinger Equation

DAI Wen-xia, ZHU Chao-sheng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A bifurcation analysis on the four-order Schrödinger equation with Dirichlet boundary condition is presented in this paper. It is proved that the problem bifurcates an attractor as λ crosses the first critical value $\lambda=\alpha\lambda_1$. The analysis is based on a newly developed attractor bifurcation theory, together with the eigenvalue analysis and the center manifold reduction.

Key words: four-order Schrödinger equation; bifurcation; Dirichlet boundary condition

责任编辑 张 枸