

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.07.017

# 快慢型 Lorenz 系统的非线性动力学研究<sup>①</sup>

张 勇<sup>1</sup>, 付木亮<sup>1</sup>, 张付臣<sup>2</sup>, 舒永录<sup>3</sup>

1. 河南工业职业技术学院 基础教学部, 河南 南阳 473000;

2. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 3. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331

**摘要:** 基于 Lyapunov 函数稳定性理论研究了快慢型 Lorenz 系统的平衡点、全局指数吸引集等问题, 进行了计算机模拟, 验证了理论计算的正确性与可行性.

**关键词:** Lorenz 系统; Lyapunov 稳定性; 平衡点; 有界性

**中图分类号:** O415.5

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2015)07-0117-05

混沌系统非线性电路、混沌保密通信、图像加密中有着非常重要的应用<sup>[1-2]</sup>. 混沌系统的全局吸引域是研究混沌系统的一个重要方向. 本文研究了一类快慢 Lorenz 混沌系统(1)的最终有界集和全局吸引集, 创新之处在于研究了  $\forall \epsilon > 0$  时的快慢型 Lorenz 系统(1)的全局吸引集, 并将系统(1)取不同参数时的全局吸引集表达式统一到一个数学表达式中, 并且利用交集的思想得到了系统(1)正半轨线最终界的一个较小估计.

## 1 动力学模型

1963 年, 美国气象学家 Lorenz E N 在研究天气的变化规律时, 建立了著名的 Lorenz 混沌系统模型. 由于研究 Lorenz 混沌系统的快慢流形和奇异性质的需要, 范兴华和田立新等人在 Lorenz 混沌系统模型上提出了快慢型 Lorenz 系统, 并且对快慢型 Lorenz 系统轨线的奇异性做了定量和定性分析<sup>[3]</sup>. 范兴华等提出的快慢型 Lorenz 系统的数学模型为<sup>[3]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = \epsilon(-xz + 28x - y) \\ \dot{z} = \epsilon\left(xy - \frac{8}{3}z\right) \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\epsilon > 0$  为系统(1)的参数. 模型(1)可用来描述热对流管中的环流运动轨迹. 在系统(1)中变量  $x, y, z$  分别代表流体速度、水平的温度差和垂直的温度差, 28 是常数与流体的 Rayleigh 数成比例,  $\frac{8}{3}$  是与空间

相关的常数. 当  $\epsilon = 0.1$ , 初值  $(x(0), y(0), z(0)) = (3.2; 8.5; 3.5)$  时, 系统(1)轨线的相图见图 1.

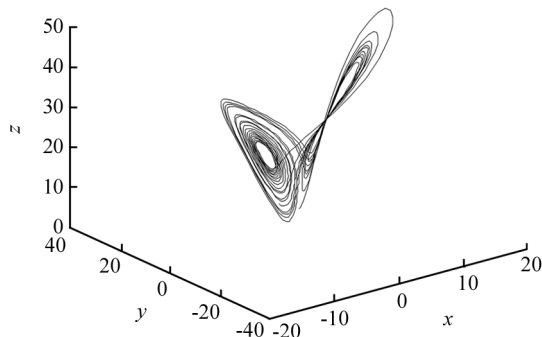


图 1 系统轨线的相图

① 收稿日期: 2014-11-12

基金项目: 国家自然科学基金(No: 10601071), 重庆市自然科学基金(cstc2014jcyjA00040).

作者简介: 张 勇(1981-), 男, 河南南阳人, 硕士, 讲师, 主要从事混沌系统的研究.

## 2 主要动力学特性分析

### 2.1 不变集

$z$  轴为系统(1)的一个正向不变集, 并且当把系统(1)限制在  $z$  轴上可以得到方程  $\dot{z} = -\frac{8\epsilon}{3}z$ , 由于这个方程的解为

$$z(t) = z(t_0)e^{-\frac{8\epsilon}{3}(t-t_0)} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

因此从  $z$  轴上任何点出发的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时都趋于点  $(0, 0, 0)$ .

### 2.2 耗散性和吸引子的存在性

对于系统(1), 记

$$f_1(x, y, z) = y - x, \quad f_2(x, y, z) = \epsilon(-xz + 28x - y), \quad f_3(x, y, z) = \epsilon\left(xy - \frac{8}{3}z\right)$$

则有

$$\nabla V = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} = -1 - \epsilon - \frac{8\epsilon}{3} \quad (2)$$

所以系统(1)是耗散的, 并且根据动力系统的基本理论可知系统(1)存在吸引子<sup>[4-5]</sup>.

### 2.3 平衡点及渐近稳定性

对于系统(1),  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{S}_+ = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ ,  $\mathbf{S}_- = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  是系统(1)的 3 个平衡点. 由于系统(1)的其它平衡点总是可以平移到坐标原点  $(0, 0, 0)$ . 因此只考虑系统(1)的平衡点  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$  的稳定性. 系统(1)在平衡点  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$  的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{S}_0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 28\epsilon & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8\epsilon}{3} \end{bmatrix}$$

从而系统(1)在平衡点  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$  的特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^3 + \left(1 + \frac{11}{3}\epsilon\right)\lambda^2 + \left(\frac{8\epsilon^2}{3} - \frac{73\epsilon}{3}\right)\lambda - 72\epsilon^2 = 0 \quad (3)$$

如果记  $m = 1 + \frac{11}{3}\epsilon$ ,  $h = \frac{8\epsilon^2}{3} - \frac{73\epsilon}{3}$ ,  $s = -72\epsilon^2$ . 系统(1)在平衡点  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$  特征方程为

$$F(\lambda) = \lambda^3 + m\lambda^2 + h\lambda + s = 0 \quad (4)$$

由 Routh-Hurwitz 准则知, 当且仅当  $m > 0$ ,  $mh - s > 0$ ,  $s > 0$  时, 特征方程(4)的特征根实部全部为负数, 此时平衡点  $\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0)$  是渐近稳定的. 系统(1)的其它平衡点的稳定性可以类似得到.

### 2.4 全局吸引集

下面我们考虑对  $\forall \epsilon > 0$ , 系统(1)的全局指数吸引集. 为此, 我们引入下面的引理.

**引理 1** 对于定义的集合

$$\Gamma_2 = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mid \frac{\tilde{y}^2}{m^2} + \frac{(\tilde{z} - l)^2}{l^2} + \frac{\tilde{x}^2}{n^2} = 1, m > 0, n > 0, l > 0 \right\} \quad (5)$$

令

$$H(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) = \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - 2l)^2 + \tilde{x}^2$$

则有

$$\max_{(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) \in \Gamma_2} H = \begin{cases} \frac{m^4}{m^2 - l^2} & m \geq n, m \geq \sqrt{2}l \\ \frac{n^4}{n^2 - l^2} & n > m, n \geq \sqrt{2}l \\ 4l^2 & m < \sqrt{2}l, n < \sqrt{2}l \end{cases}$$

证 根据求函数条件极值的拉格朗日乘数法容易证明.

定理 1 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 下面所定义的集合

$$\Psi = \left\{ (x, y, z) \mid mx^2 + \lambda y^2 + \lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right)^2 \leq r^2, \forall \lambda > 0, \forall m > 0 \right\} \quad (6)$$

为系统(1)的一个最终有界和正向不变集. 这里

$$r^2 = \begin{cases} \frac{64(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{39\lambda\varepsilon^2} & 0 < \varepsilon \leq 1 \\ \frac{64(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda(16\varepsilon - 3)} & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

证 构造广义 Lyapunov 函数

$$V(x, y, z) = V(X) = mx^2 + \lambda y^2 + \lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right)^2 \quad \forall m > 0, \forall \lambda > 0 \quad (7)$$

沿着系统(1)的正半轨线求导函数, 即得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(X(t))}{dt} \right|_{(1)} &= 2mx\dot{x} + 2\lambda y\dot{y} + 2\lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right) \dot{z} = \\ &= 2mx(y - x) + 2\lambda\varepsilon y(-xz - y + 28x) + 2\lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right) \left( xy - \frac{8z}{3} \right) = \\ &= -2mx^2 - 2\lambda\varepsilon y^2 - \frac{16}{3}\lambda\varepsilon z^2 + \frac{16}{3}(m + 28\lambda\varepsilon)z \end{aligned}$$

令  $\dot{V} = 0$ , 可以求出下面的三维椭球面  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y, z) \mid mx^2 + \lambda\varepsilon y^2 + \frac{16\lambda\varepsilon}{3} \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon} \right)^2 = \frac{4(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda\varepsilon} \right\} \quad (8)$$

在  $\Gamma_0$  外面有  $\dot{V} < 0$ . 而在  $\Gamma_0$  内部, 有  $\dot{V} > 0$ . 从而函数  $V(x, y, z)$  只能在三维椭球面  $\Gamma_0$  取得最大值. 因  $V(x, y, z)$  为一个连续函数, 且椭球面  $\Gamma_0$  为有界的闭集合, 故函数  $V(x, y, z)$  能够在三维椭球面  $\Gamma_0$  上取到相应的最大值. 下面我们计算该最大值  $\max_{(x, y, z) \in \Gamma_0} V(x, y, z) = r^2$ , 即求如下的条件极值问题:

$$\begin{cases} \max_{(x, y, z) \in \Gamma_0} V = \max \left\{ mx^2 + \lambda y^2 + \lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right)^2, (x, y, z) \in \Gamma_0 \right\}, \\ \text{s. t. } \Gamma_0 = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{mx^2}{\frac{4(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda\varepsilon}} + \frac{\lambda y^2}{\frac{4(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda\varepsilon^2}} + \frac{\lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon} \right)^2}{\frac{(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{4\lambda\varepsilon^2}} = 1 \right\} \end{cases}$$

令  $\sqrt{m}x = \tilde{x}$ ,  $\sqrt{\lambda}y = \tilde{y}$ ,  $\sqrt{\lambda}z = \tilde{z}$ , 则上述条件极值问题可以转化为

$$\begin{cases} \max_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \Gamma_0} V = \max \left\{ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \left( \tilde{z} - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\sqrt{\lambda}\varepsilon} \right)^2, (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \Gamma_0 \right\}, \\ \text{s. t. } \Gamma_0 = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mid \frac{\tilde{x}^2}{\frac{4(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda\varepsilon}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{4(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{3\lambda\varepsilon^2}} + \frac{\left( \tilde{z} - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{2\sqrt{\lambda}\varepsilon} \right)^2}{\frac{(m + 28\lambda\varepsilon)^2}{4\lambda\varepsilon^2}} = 1 \right\} \end{cases}$$

由引理 1 知结论成立. 易证  $\Psi$  为系统(1)的一个最终有界和正向不变集.

定理 2 对任意的  $\forall \varepsilon > 0, m > 0, \lambda > 0$ , 令

$$\begin{aligned} V_{m,\lambda}(x, y, z) &= mx^2 + \lambda y^2 + \lambda \left( z - \frac{m + 28\lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \right)^2 \\ \beta &= \min\{1, \varepsilon\} > 0, X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

$$L_{m,\lambda} = \frac{8(m+28\lambda\epsilon)^2}{3\beta\lambda\epsilon} = \begin{cases} \frac{8(m+28\lambda\epsilon)^2}{3\lambda\epsilon}, & 1 \leq \epsilon, \\ \frac{8(m+28\lambda\epsilon)^2}{3\lambda\epsilon^2}, & \epsilon \leq 1 \end{cases}$$

则当  $V_{m,\lambda}(X(t)) \geq L_{m,\lambda}$ ,  $V_{m,\lambda}(X_0) > L_{m,\lambda}$  ( $t \geq t_0$ ) 时, 对于系统(1)的正半轨线有估计式:

$$[V_{m,\lambda}(X(t)) - L_{m,\lambda}] \leq [V_{m,\lambda}(X_0) - L_{m,\lambda}] e^{-\beta(t-t_0)} \quad (9)$$

从而集合

$$\Omega_{m,\lambda} = \{(x, y, z) \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V_{m,\lambda}(X(t)) \leq L_{m,\lambda}\} \quad (10)$$

为系统(1)的一个全局指数吸引集.

**证** 作广义正定、径向无界的 Lyapunov 函数

$$V_{m,\lambda}(x, y, z) = mx^2 + \lambda y^2 + \lambda \left( z - \frac{m+28\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon} \right)^2 \quad \forall m > 0, \forall \lambda > 0$$

当  $V_{m,\lambda}(X(t)) \geq L_{m,\lambda}$ ,  $V_{m,\lambda}(X_0) > L_{m,\lambda}$  ( $t \geq t_0$ ) 时, 计算  $V_{m,\lambda}(X(t))$  对时间  $t$  的导数

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_{m,\lambda}(X(t))}{dt} \right|_{(1)} &= 2mx\dot{x} + 2\lambda y\dot{y} + 2\lambda \left( z - \frac{m+28\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon} \right) \dot{z} = \\ &= 2mx(y-x) + 2\lambda\epsilon y(-xz-y+28x) + 2\lambda \left( z - \frac{m+28\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon} \right) \left( xy - \frac{8z}{3} \right) = \\ &= -2mx^2 - 2\lambda\epsilon y^2 - \frac{16}{3}\lambda\epsilon z^2 + \frac{16}{3}(m+28\lambda\epsilon)z \leq \\ &= -mx^2 - \lambda\epsilon y^2 - \frac{8}{3}\lambda\epsilon z^2 + \frac{16}{3}(m+28\lambda\epsilon)z \leq \\ &= -mx^2 - \lambda\epsilon y^2 - \frac{8}{3}\lambda\epsilon \left( z - \frac{m+28\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon} \right)^2 + \frac{8}{3} \frac{(m+28\lambda\epsilon)^2}{\lambda\epsilon} \leq \\ &= -\beta V_{m,\lambda}(X(t)) + \frac{8}{3} \frac{(m+28\lambda\epsilon)^2}{\lambda\epsilon} = \\ &= -\beta [V_{m,\lambda}(X(t)) - L_{m,\lambda}] < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

当  $V_{m,\lambda}(X(t)) \geq L_{m,\lambda}$ ,  $V_{m,\lambda}(X_0) > L_{m,\lambda}$  ( $t \geq t_0$ ) 时, 对(11)式积分有

$$\begin{aligned} V_{m,\lambda}(X(t)) &\leq V_{m,\lambda}(X(t_0)) e^{-\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \beta L_{m,\lambda} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = \\ &= V_{m,\lambda}(X(t_0)) e^{-\beta(t-t_0)} + L_{m,\lambda} (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \end{aligned} \quad (12)$$

整理得

$$V_{m,\lambda}(X(t)) - L_{m,\lambda} \leq [V_{m,\lambda}(X_0) - L_{m,\lambda}] e^{-\beta(t-t_0)} \quad (13)$$

令  $t \rightarrow +\infty$ , 则由(13)式可得

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V_{m,\lambda}(X(t)) \leq L_{m,\lambda}$$

根据定义知

$$\Omega_{m,\lambda} = \{(x, y, z) \mid \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V_{m,\lambda}(X(t)) \leq L_{m,\lambda}\}$$

为系统的一个全局指数吸引集.

**注 1** 取  $m=1, \lambda=1, \epsilon=0.1$ , 由定理 2 系统(1)的轨线包含在  $\Omega_{1,1} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-38)^2 \leq 62.1^2\}$  内, 如图 2 所示. 从图 2 中可以看出系统的正半轨线最终进入  $\Omega_{1,1}$  与定理 2 的理论结果相吻合, 表明了计算结果的正确性.

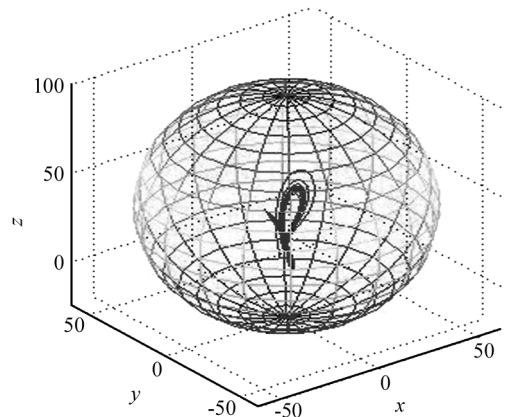


图 2 系统轨线进入  $\Omega_{1,1}$

## 参考文献:

- [1] 叶志勇, 马文文, 豆中丽, 等. 一类非自治混沌系统的时滞反馈控制 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(5): 18—22.
- [2] 朱 伟, 段文强, 杨 阳, 等. 基于分数阶超混沌系统的图像加密算法及安全性分析 [J]. 重庆邮电大学学报: 自然科学版, 2012, 24(2): 501—506.
- [3] 范兴华, 田立新. 快慢型 Lorenz 系统和 Chua 系统的慢流形分析 [J]. 西华师范大学学报: 自然科学版, 2003, 24(3): 338—342.
- [4] SPARROW C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [5] 彭再平, 王春华, 林 愿, 等. 一种新型的四维多翼超混沌吸引子及其在图像加密中的研究 [J]. 物理学报, 2014, 63(24): 1—10.

## Analysis of Nonlinear Dynamics of the Fast-Slow Lorenz System

ZHANG Yong<sup>1</sup>, FU Mu-liang<sup>1</sup>,  
ZHANG Fu-chen<sup>2</sup>, SHU Yong-lu<sup>3</sup>

1. Department of Basic Teaching, Henan Polytechnic Institute, Nanyang Henan 473000, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

3. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

**Abstract:** Based on Lyapunov function theory, we have investigated the equilibrium points and global attractive sets of the new fast-slow Lorenz system. Based on the global attractive sets obtained in this paper, we can get the boundedness of all variables of the system. Finally, we make numerical simulations, and the results are consistent with our computation.

**Key words:** Lorenz system; Lyapunov stability; equilibrium point; boundedness

责任编辑 张 枸

