

关于亚 Abel 的或超可解的有理群^①

郭继东¹, 任永才², 张志让³

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000; 2. 四川大学 数学学院, 成都 610064;

3. 成都信息工程学院 数学学院, 成都 610225

摘要: 设 G 是一个有限群. 令 χ 是 G 的一个(复)特征标. 如果 $\chi(g)$ 是有理数, $\forall g \in G$, 则称 χ 是有理值的. 如果 G 的每个不可约特征标都是有理值的, 则称 G 是有理群. 完全确定了亚 Abel 的有理群和超可解的有理群的结构, 并由此建立若干其它新结果.

关键词: 有限群; 有理群; 超可解群; 亚 Abel 群; 共轭; 分裂域

中图分类号: O152.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)08-0059-06

文中所说的群都是指有限群. 我们用 C_n 表示 n 阶循环群. 字母 G 总是表示一个群. 对于 $|G|$ 的素因子 p , 我们用 $\text{Syl}_p(G)$ 表示群 G 的全体 Sylow p -子群组成的集合. 符号 $\exp(G)$ 表示群 G 的指数. 文中其它符号都是标准的, 取自文献[1].

令 χ 是 G 的一个(复)特征标. 如果 $\chi(g)$ 是有理数($\forall g \in G$), 则称 χ 是有理值的. 如果 G 的每个不可约特征标都是有理值的, 则称 G 是有理群.

对于亚 Abel 的或超可解的有理群 G , 已知的结果是 $|G| = 2^n 3^m$ (见文献[2-3]). 本文的目的是完全确定亚 Abel 的有理群和超可解的有理群的结构, 并由此建立若干其它新结果(包括应用). 此外, 我们还改进了有理群理论的一个重要的定理且完善了它的(原)证明. 文中所说的亚 Abel 群都是非 Abel 群.

下述引理 1—引理 3 是关于有理群的基础知识:

引理 1^[4] 下述各个命题成立:

- (i) 非平凡的有理群是偶数阶的;
- (ii) 有理群的商群是有理群;
- (iii) 有理群的直因子是有理群;
- (iv) 如果有理群 G 不是 2-群, 则 G 的 Sylow 2-子群不是正规的;
- (v) G 是 Abel 的有理群当且仅当 G 是初等 Abel 2-群;
- (vi) 如果 G 是有理群, 且 G 的换位子群 $G' < G$, 则 G/G' 是初等 Abel 2-群;
- (vii) 设 G 是有理群, 并令 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 则 $Z(P)$ 是初等 Abel p -群.

引理 2^[4] 下述两个命题成立:

- (i) G 是有理群当且仅当对任意 $x \in G$, 循环群 $\langle x \rangle$ 的生成元在 G 中共轭;
- (ii) G 是有理群当且仅当对任意 $x \in G$, $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x) \cong \text{Aut}(\langle x \rangle)$.

① 收稿日期: 2014-09-24

基金项目: 新疆维吾尔自治区普通高等学校重点学科基金资助项目(2012ZDXK12); 国家自然科学基金项目(11471055).

作者简介: 郭继东(1965-), 男, 山东鄄城人, 教授, 主要从事群论的研究.

通信作者: 任永才, 教授.

引理 3^[4] 设 G 是可解的有理群, 并令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 如果 H 是 G 的包含 S 的子群, 则 $N_G(H) = H$.

推论 1 设 G 是可解的有理群, 并令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 如果 S 是 Abel 的, 则 $G = SG'$, S 是初等 Abel 2-群, 换位子群 G' 是奇阶群.

证 我们有 $G = SG'$ (见引理 1). 据引理 3, 我们有 $N_G(S) = S$, 从而, 由于 S 是 Abel 的, G 有正规 2-补 K (见文献[5]p. 245). 于是, $G = SK$. 由于

$$G/K = SK/K \cong S/S \cap K = S$$

且 S 是 Abel 的, 我们有 $G' \leq K$, 从而 G' 是奇阶的. 据引理 1 知 $S = Z(S)$ 是初等 Abel 2-群. 证毕.

引理 4 令 P 和 S 是 G 的两个子群, 并假设 P 是 p^n 阶初等 Abel p -群 (p 是奇素数), S 是初等 Abel 2-群, 且 $S \leq N_G(P)$. 那么, 存在 $1 \neq x_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$), 使得

$$P = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle) \quad i = 1, \dots, n$$

证 P 可视为特征为 p 的素域 F_p 上的 n 维向量空间 (乘法运算符视为加法运算符, 单位元 1 视为零元 0). 由于 $S \leq N_G(P)$, S 按共轭作用于 P 就导出 S 在素域 F_p 上的一个表示. 记这个表示为 ρ (P 表示空间). 据 Maschke 定理 (见文献[1]p. 23), ρ 是完全可约的. 于是, ρ 是它的若干个不可约成分 U_i 的直和:

$$P = U_1 \oplus \cdots \oplus U_i$$

素域 F_p 是有理群的任一个 p -模表示的分裂域 (见文献[6]). 于是, 由于 S 是初等 Abel 2-群, 而初等 Abel 2-群显然是有理群, 故素域 F_p 是 S 的不可约 p -模表示 U_i 的分裂域. 从而各个 U_i 是绝对不可约的. 于是, 由于 S 是 Abel 群, U_i 是 1 维的 (见文献[1]). 所以, $U_i = F_p x_i$ 及 $t = n$. 于是, 回到乘法运算符, 我们有:

$$U_i = \langle x_i \rangle \quad i = 1, \dots, n$$

$$P = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle$$

且 S 正规化各个 $\langle x_i \rangle$, 即

$$S \leq N_G(\langle x_i \rangle) \quad i = 1, \dots, n$$

证毕.

定理 1 设 G 是有理群. 令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 如果换位子群 $G' > 1$ 是奇阶的, 则 $G = SG'$, S 是初等 Abel 2-群, G' 是 3-群. 此外, $Z(G')$ 是初等 Abel 3-群, 存在 $x_i \in Z(G')$ ($i = 1, \dots, n$), 使得:

$$Z(G') = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

证 由于 G 是有理群, 据引理 1 有 $G = SG'$. 于是, 由于 G' 是奇阶的 (题设), 我们有

$$G/G' = SG'/G' \cong S/(S \cap G') = S$$

从而 S 是初等 Abel 2-群 (见引理 1). 据奇阶群可解定理, G 是可解的. 令 P 是 G 的含于 G' 中的一个极小正规子群. 那么, P 是一个初等 Abel p -群, p 是奇素数. G/P 是有理群 (见引理 1), 且 $(G/P)' = G'/P$ 是奇阶的. 于是, 用归纳法我们可设 G'/P 是 3-群. 如果 $p = 3$, 则 G' 是 3-群. 下面我们证明 $p = 3$.

任取 $1 \neq x \in P$. 那么, 我们有 $|x| = p$. 于是据引理 2 知, $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$ 是 $p-1$ 阶循环群 C_{p-1} .

据引理 4, 存在 $1 \neq x \in P$, 使得 $S \leq N_G(\langle x \rangle)$. 因为 $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$ 是 $p-1$ 阶循环群 C_{p-1} , 我们有

$$(N_G(\langle x \rangle))' \leq C_G(x) \leq SC_G(x) \leq N_G(\langle x \rangle)$$

这表明 $SC_G(x) \triangleleft N_G(\langle x \rangle)$. 于是, 据引理 3 我们得到 $SC_G(x) = N_G(\langle x \rangle)$. 从而我们有

$$S/(S \cap C_G(x)) \cong N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$$

于是, 由于 $N_G(\langle x \rangle)/C_G(x)$ 是 $p-1$ 阶循环群 C_{p-1} , $S/(S \cap C_G(x))$ 是 $p-1$ 阶循环群. 另一方面, 由于 S 是初等 Abel 2-群, $S/(S \cap C_G(x))$ 是初等 Abel 2-群. 所以我们得到 $C_{p-1} = C_2$, 从而 $p = 3$.

由于 $G' \in \text{Syl}_3(G)$, $Z(G')$ 是初等 Abel 3-群 (见引理 1). 由于 $G' \triangleleft G$, 我们有 $Z(G') \triangleleft G$. 于是, 利用引理 4 和引理 2 就完成了证明 (据引理 2 及 $|x_i| = 3$ 知 $S \not\leq C_G(x_i)$). 证毕.

定理 2 设群 G 不是 2-群. 令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 如果 G 是有理群, 且 G 的换位子群 G' 是幂零的, 或者,

如果 G 既是超可解群又是有理群, 则下述两个命题成立:

(i) 如果 $G' > 1$ 是奇阶的, 则 $G = SG'$, S 是初等 Abel 2-群, G' 是 3-群. 此外, $Z(G')$ 是初等 Abel 3-群, 存在 $x_1, \dots, x_n \in Z(G')$, 使得:

$$Z(G') = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

(ii) 假设 $G' > 1$ 是偶数阶的. 那么, $G = SK$, $K \triangleleft G$, $K \neq 1$ 是 3-群, $G' = P \times K$, 其中 $1 \neq P \in \text{Syl}_2(G')$, S/P 是初等 Abel 2-群, S 不是 Abel 的, 且 $Z(G) \neq 1$. 此外, $Z(K)$ 是初等 Abel 3-群, 且存在 $x_i \in Z(K)$ ($i = 1, \dots, n$), 使得:

$$Z(K) = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

证 当 G 是超可解群时, G 的换位子群 G' 是幂零的 (见文献[7]p. 716), 所以我们只需讨论“ G 是有理群, 且 G 的换位子群 G' 是幂零的”这一情形.

据定理 1 知命题 (i) 成立.

(ii) 的证明: 令 $P \in \text{Syl}_2(G')$. 由于 G' 是幂零的, 我们有 $G' = P \times K$, 其中 K 是奇阶群. 由于 G' 是偶数阶的, $P \neq 1$, $K \neq 1$, 否则, G' 是 2-群, 从而 G 是 2-群 (见引理 1), 与题设矛盾. 显然有 $P \triangleleft G$. 于是, G/P 是有理群 (见引理 1), 并且 G/P 的换位子群 $(G/P)' = G'/P \cong K$ 是奇阶的. 从而, 据定理 1 知, $K \cong G'/P$ 是 3-群. 因为 $G = SG'$ (见引理 1) 且 P 是 G 的正规 2-子群, 我们有

$$G = SG' = S(P \times K) = SPK = SK$$

我们有 $K \in \text{Syl}_3(G)$, 故 $Z(K)$ 是初等 Abel 3-群 (见引理 1). 由于 $(G/P)' = G'/P$ 是奇阶的且是幂零的, 将 (i) 用于有理群 G/P , 并注意 $[P, K] = 1$, 我们断定: 存在 $x_i \in Z(K)$ ($i = 1, \dots, n$), 使得:

$$Z(K) = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

由于:

$$P \triangleleft G \quad P \leq S \quad P \cap Z(S) \neq 1$$

于是, 由于 $G = SK$ 且 $G' = P \times K$, 我们有

$$1 \neq P \cap Z(S) \leq Z(G)$$

于是 $Z(G) \neq 1$. 由于 G' 是偶数阶的, 据推论 1 知 S 不是 Abel 的. 证毕.

定理 3 设 G 既是亚 Abel 群又是有理群. 令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 下述两个命题成立:

(i) 如果 $G' > 1$ 是奇阶的, 则 $G = SG'$, S 是初等 Abel 2-群, G' 是初等 Abel 3-群. 此外, 存在 $x_1, \dots, x_n \in G'$, 使得:

$$G' = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

(ii) 假设 $G' > 1$ 是偶数阶的, 但不是 2-群. 那么, $G = SK$, $K \triangleleft G$, $K \neq 1$ 是初等 Abel 3-群, $G' = P \times K$, 其中 $1 \neq P \in \text{Syl}_2(G')$, S/P 是初等 Abel 2-群, S 不是 Abel 的, $Z(G) \neq 1$, 并且, 存在 $x_1, \dots, x_n \in K$, 使得:

$$K = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

此外, $\exp(P) = 2, 4$, $\exp(S) = 2^2, 2^3$.

证 由于 G 是亚 Abel 群, G' 是 Abel 群(自然是幂零群). 此外, 据题设, G 不是 2-群. 于是, 据定理 2, 我们只需证明 (ii) 中最后的结论, 即证明 $\exp(P) = 2, 4$, $\exp(S) = 2^2, 2^3$.

注意到:

$$G' = P \times K \quad 1 \neq P \in \text{Syl}_2(G')$$

任取 $1 \neq y \in P$, 我们有 $|y| = 2^m$, m 是某个正整数. 由于 G' 是 Abel 的, 我们有 $G' \leq C_G(y)$. 据引理 2, 我们有

$$N_G(\langle y \rangle)/C_G(y) \cong \text{Aut}(\langle y \rangle) = C_{2^{m-1}}$$

另一方面, 由于 $G' \leq C_G(y)$, 且 G/G' 是初等 Abel 2-群(见引理 1), $N_G(y)/C_G(y)$ 是初等 Abel 2-群. 所以, 我们有 $m-1 \leq 1$, $m \leq 2$. 这说明 $|y| = 2$ 或 $|y| = 4$. 所以, 我们有 $\exp(P) = 2, 4$. S/P 是初等 Abel 2-群, 于是, 由于 $\exp(P) = 2, 4$, $\exp(S)$ 除尽 2^3 . 如果 $\exp(S) = 2$, 则 S 是初等 Abel 2-群, 与“ S 不是 Abel 群”矛盾. 所以, $\exp(S) \neq 2$. 于是, $\exp(S) = 2^2, 2^3$. 证毕.

文献[8]中有下述结果: 如果 G 是可解的有理群, 且 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, 则 $G/O_2(G) \cong S_3$ 或 $G/O_2(G) \cong (C_3 \times C_3)Q_8$, 一个以 3^2 阶初等 Abel 3-群为核且以 8 阶四元数群 Q_8 为补的 Frobenius 群. 对于亚 Abel 群和 G' 是奇阶群, 以及 G' 是 2-正规的(这对超可解群成立)这 3 种情形, 我们得到更精确的描述如下(推论 2、推论 3 和推论 4):

推论 2 设 G 既是亚 Abel 群又是有理群. 如果 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, 则下述两个命题成立:

(i) 如果 G' 是奇阶的, 则 $G \cong S_3$ 或 $G \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$;

(ii) 如果 G' 是偶数阶的但不是 2-群, 令 $P \in \text{Syl}_2(G')$, 则 $G/P \cong S_3$ 或

$$G/P \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$$

此外, G 的 Sylow 2-子群 S 不是 Abel 的, 且 $\exp(S) = 2^2, 2^3$.

证 由于 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, G 的商群 G/N 中同阶的奇阶元在 G/N 中共轭(见文献[8]). 据此及定理 3 和引理 1 就完成了证明. 证毕.

推论 3 设 G 是有理群, 且 G' 是奇阶的. 如果 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, 则 $G \cong S_3$ 或

$$G \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$$

证 令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 据定理 1, $G = SG'$, $G' \in \text{Syl}_3(G)$, S 是初等 Abel 2-群. 据推论 2, 我们只需证明 $|G'| = 3$. 因为 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, G 的商群中同阶的奇阶元共轭(见文献[8]). 于是, 由于有理群的商群是有理群(见引理 1), 我们可用归纳法. 如果 G' 是 Abel 的, 则据推论 2 有 $|G'| = 3$. 假设 G' 不是 Abel 的, 将归纳法用于 $G/Z(G')$, 得到 $|G'/Z(G')| = 3$. 因为 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, 据定理 1, 我们得到 $|Z(G')| = 3$. 于是, 我们有 $|G'| = 3^2$, 这意味着 G' 是 Abel 的, 矛盾. 证毕.

由推论 3 立刻得到:

推论 4 设 G 是有理群, 且设 G' 的 Sylow 2-子群 P 在 G' 中正规(当 G 是超可解群或当 G' 是幂零群时, 后一假设自然成立). 如果 G 中同阶的奇阶元在 G 中共轭, 则 $G/P \cong S_3$ 或 $G/P \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$.

定理 4 设 G 是有理群又是亚 Abel 群或超可解群. 令 $S \in \text{Syl}_2(G)$, 并设 $|S| = 2^4$. 如果 $G' > 1$ 是偶数阶的但不是 2-群, 则下述之一成立:

(i) $G = (C_2 \times Q_8)K$, $K \triangleleft G$, K 是 3-群(当 G 是亚 Abel 群时, K 是初等 Abel 3-群), Q_8 是 8 阶四元数群;

(ii) $G = (C_2 \times D_8)K$, $K \triangleleft G$, K 是 3-群(当 G 是亚 Abel 群时, K 是初等 Abel 3-群), D_8 是 8 阶二面体群.

证 据定理 2 和定理 3, $G = SK$, $K \triangleleft G$, K 是 3-群(当 G 是亚 Abel 群时, K 是初等 Abel 3-群), 且 S 不是 Abel 的. 于是, $S \cong G/K$ 是非 Abel 的有理群(见引理 1). 由于 $|S| = 2^4$, 而 2^4 阶非 Abel 的有理群是 $C_2 \times Q_8$ 和 $C_2 \times D_8$ (这个结论的证明从略). 证毕.

定理 5 设 G 是有理群. 下述两个命题成立:

- (i) 如果 $G' > 1$ 是奇阶循环群, 则 $G \cong S_3$ 或 $G \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$;
 (ii) 如果 G' 是偶数阶循环群但不是 2-群, 令 $P \in \text{Syl}_2(G')$, 则 $G/P \cong S_3$ 或

$$G/P \cong (C_2 \times \cdots \times C_2) \times S_3$$

此外, P 是 2 阶或 4 阶循环群, S 不是 Abel 的, $\exp(S) = 2^2, 2^3$.

证 (i) 的证明: 由于 G' 是奇阶循环群, 据定理 3, 我们有 $G' = C_3$. 于是, 注意到

$$\text{Aut}(G') = \text{Aut}(C_3) = C_2$$

用定理 3 就完成了 (i) 的证明.

(ii) 的证明: 用定理 3 和 (i). 证毕.

关于共轭类的长(阶)有一个著名的猜想: 设群 $G > 1$, 如果 G 的不同的共轭类有不同的长, 则 $G \cong S_3$. 这个猜想的证实看来要用有限单群分类定理. 有人不用有限单群分类定理, 但对群加以某些限制来证明这个猜想(见文献[9–10]). 我们在这里也提供一个其证明很简单的类似的结果如下:

定理 6 设群 $G > 1$. 如果 G 是亚 Abel 群, 且 G 的不同的共轭类有不同的长, 则 $G \cong S_3$.

证 由于 G 的不同的共轭类有不同的长, 我们有 $Z(G) = 1$. 此外, 对任一个 $1 \neq x \in G$, $\langle x \rangle$ 的生成元在 G 中共轭. 这说明 G 是有理群(见引理 2). 假设 G' 是偶数阶的, 那么据定理 3 我们有 $Z(G) \neq 1$, 与 $Z(G) = 1$ 矛盾. 所以, G' 是奇数阶的. 于是, 据题设和定理 3, 我们有 $|G'| = 3$. 从而, 据定理 5(i) 及 $Z(G) = 1$ 这一事实, 我们有 $G \cong S_3$. 证毕.

现在我们改进文献[4]中的命题 21(这是有理群理论中的一个很重要的结果), 并完善该命题 21 的(原)证明(见下述定理 7). 我们给出的这个完善的证明, 使人们确信文献[4]中命题 21 的证明不涉及有限单群分类定理, 这对于该命题的应用来说当然是很重要的事.

定理 7 设 G 是有理群, 并令 $S \in \text{Syl}_2(G)$. 如果 S 是 Abel 的, 则 $G = SG'$, S 是初等 Abel 2-群, G' 是 3-群, $Z(G')$ 是初等 Abel 3-群, 并且, 存在 $x_i \in Z(G')$ ($i = 1, \dots, n$), 使得:

$$Z(G') = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle \quad S \leq N_G(\langle x_i \rangle)$$

但是

$$S \not\leq C_G(\langle x_i \rangle) \quad i = 1, \dots, n$$

证 据推论 1 和定理 1, 我们只需证明 G 是可解群.

假设 G 不是可解的. 由于 G 的 Sylow 2-子群是 Abel 的, 据文献[11]知道: 令 $O(G)$ 是 G 的极大奇阶正规子群, 那么 G 有正规子群 $N \geq O(G)$, 使得 G/N 是奇阶的, 且 $N/O(G) \cong P \times R$, 其中 P 是 2-群, R 是单群 T 的若干个同构副本的直积, 且 T 与下述单群之一同构: $L_2(q)$ ($q > 3$, $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$) 或 $q = 2^m$), Janke 单群 J_1 以及 Ree 型单群 ${}^2G(3^{2m+1})$.

由于 G/N 是奇阶的, 据引理 1 可知 $G = N$, 并且, 要么 $L_2(q)$ 是有理群(其中 $q > 3$, $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$) 或 $q = 2^m$), 要么 J_1 是有理群, 要么 ${}^2G(3^{2m+1})$ 是有理群. 但是, 上述各个单群都不是有理群(由文献[12]可知 J_1 不是有理群). 设 $T = {}^2G(3^{2m+1})$. 据文献[13]知, T 有个元素 x 的阶是 $3^{2m+1} + 1 + 3^{m+1}$, 且 $|N_T(\langle x \rangle) / \langle x \rangle| = 6$. 所以, 据引理 2 知, ${}^2G(3^{2m+1})$ 不是有理群. 利用引理 2 和关于 $L_2(q)$ 的结构定理(见文献[7]p. 192)可知 $L_2(q)$ ($q > 3$, $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$) 或 $q = 2^m$) 不是有理群, 矛盾, 从而 G 是可解的. 证毕.

最后, 我们指出, 利用定理 1 容易证明下述定理 8 成立(限于篇幅证明从略):

定理 8 设 G 的换位子群 G' 是奇阶的. 如果 G 的不同共轭类的长不同, 则 $G \cong S_3$.

利用定理 8 和定理 2 立刻得到文献[2]中的主要结果, 即:

推论 5^[2] 设 G' 是幂零的, 或 G 是超可解的. 如果 G 的不同共轭类的长不同, 则 $G \cong S_3$.

利用定理 7 和定理 8 立刻得到:

推论 6 设 G 的 Sylow 2-子群是 Abel 的. 如果 G 的不同共轭类的长不同, 则 $G \cong S_3$.

参考文献:

- [1] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. Chelsea: Dover Publications, 2006.
- [2] MARKEL F M. Groups with Many Conjugate Elements [J]. J Algebra, 1973, 26: 69—74.
- [3] BASMANJI B G. Rational Nonlineal Characters of Metabelian Groups [J]. Proc Amer Math Soc, 1982, 86(2): 175—180.
- [4] KLETZING D. Structure and Representations of $\mathbf{Q}$ -Groups [M] //Lecture Notes in Mathematics: 1084.
- [5] ROSE J S. A Course on Groups Theory [M]. New York: MELBOURNE, 1978.
- [6] GOW R. Groups Whose Character Are Rational-Valued [J]. J Algebra, 1976, 40: 280—299.
- [7] HUPPET B. Endliche Gruppen I [M]. New York: Springer-Verlag, 1967.
- [8] 钱国华, 游兴中, 施武杰. 中心外的同阶元必共轭的有限群 [J]. 中国科学: A 辑, 2007, 37(10): 1160—1166.
- [9] MARKEL F M. Groups with Many Conjugate Elements [J]. J Algebra, 1973, 26: 69—74.
- [10] WARD M B. Finite Groups in Which No Two Distinct Conjugacy Classes Have the Same Order [J]. Arch Math, 1990, 54: 111—116.
- [11] WALTER J H. The Characterization of Finite Groups with Abelian Sylow 2-Subgroups [J]. Ann of Math, 1969, 89: 405—514.
- [12] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [13] WARD H N. On Ree's Series of Simple Groups [J]. Trans Amer Math Soc, 1966, 121: 62—89.
- [14] 郭继东, 任永才, 张志让. 7 次交错群 A_7 的新刻画 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2014, 36(4): 34—38.
- [15] 郭继东, 任永才, 张志让. 关于“好群” [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2015, 37(4): 17—22.

About Metabelian or Supersolvable Rational Groups

GUO Ji-dong¹, REN Yong-cai², ZHANG Zhi-rang³

1. College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;

2. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

3. School of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China

Abstract: Let G be a finite group, and χ be a character of G . If $\chi(g)$ is rational, $\forall g \in G$, then we say that χ is rational-value. If every irreducible character of G is rational-value, then G is called a rational group. In this paper, we determine the structures of metabelian or supersolvable rational groups and establish some other results about rational groups.

Key words: finite group; rational group; supersolvable group; metabelian group; conjugation; splitting field

责任编辑 廖 坤

