

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.011

关于 (m, n) -主弱平坦序 S -系^①

乔虎生, 陈小飞

西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070

摘要: 设 S 是序么半群, m, n 为正整数. 给出了主弱平坦序 S -系的一个推广, 称之为 (m, n) -主弱平坦系. 在此新性质的基础上研究了序 S -系的同调分类问题, 作为应用, 推广了一些重要结果.

关键词: 主弱平坦性; 同调分类; S -系

中图分类号: O152.7

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2015)08-0065-06

在本文中, 令 \mathbb{N}_+ 表示正整数集, S 是序么半群.

令 A 是一个非空偏序集, 如果存在一个映射 $A \times S \rightarrow A$, $(a, s) \mapsto as$, 满足:

(i) 对任意的 $a \in A, s, t \in S$, 由 $s \leq t$ 可推出 $as \leq at$; 对任意的 $a, b \in A, s \in S$, 由 $a \leq b$ 可推出 $as \leq bs$;

(ii) 对任意的 $a \in A$ 和 $s, t \in S$, 有 $(as)t = a(st)$ 且 $a \cdot 1 = a$.

则称 A 为序右 S -系.

序左 S -系 B 的定义类似. 序左(右) S -系关于保序同态形成范畴, 分别记为 S -POS 和 POS- S .

20 世纪 80 年代, Fakhruddin 等作者研究了序 S -系. 近年来, 关于该领域出现了一些新成果, 例如文献[1-9]等.

设 S 是序么半群, A 是序右 S -系. 由文献[3], 如果对任意的 $s \in S, a, a' \in A$, 若 $a \otimes s = a' \otimes s$ 在 $A \otimes S$ 中成立, 则 $a \otimes s = a' \otimes s$ 在 $A \otimes S_s$ 中成立, 则称 A 是主弱平坦的.

设 S 是序么半群 S 中的元素, 如果存在 $x \in S$ 使得 $s = sxs$, 则称 S 是正则的. 如果 S 中每一个元素正则, 则称序么半群 S 是正则的. 文献[3]提出一个公开问题: 如果所有的序 S -系是主弱平坦的, 那么 S 是否一定是正则的? 2007 年, 文献[4]给出了一个肯定回答.

设 S 为序么半群, 如果对任意的 $p, q \in S$, 存在 $u \in S$, 使得 $up = uq$, 则称 S 是弱左可收缩的. 如果对任意的 $s, t \in S$, 存在 $u, v \in S$, 使得 $us \leq vt$, 则称 S 是弱右可逆的.

在本文中, 我们给出了序 S -系范畴中主弱平坦性的一个推广, 运用这个新的性质, 得到了一些包含正则序么半群的更广的序么半群类. 这些新的序么半群类, 无论在环论还是半群理论中, 都有其应用背景. 同时, 本文的主要结果推广了一些已知的重要结论.

设 S 是序么半群, 称序右 S -系 A_s 满足条件(P), 如果对任意的 $a, b \in A, s, t \in S$, 若 $as \leq bt$, 则存在 $u, v \in S, c \in A$, 使得 $a = cu, b = cv, us \leq vt$.

设 S 是序么半群, I 是 S 中的非空集合. 我们说 I 是 S 的右理想, 指的是 $IS \subseteq I$ (不一定是序右理

① 收稿日期: 2014-10-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461060); 甘肃省高校基本科研业务费项目.

作者简介: 乔虎生(1974-), 男, 甘肃灵台人, 教授, 主要从事半群代数理论的研究.

想). S 的两次拷贝, 并以其真右理想 I 为核的融合余积, 在研究 S -系的同调分类问题时是非常重要的一个工具, 一般记作 $A(I)$, 其定义和偏序参见文献[2]. 关于序 S -系中主弱平坦性的更多讨论, 可以参见文献[3].

首先我们给出序 S -系上主弱平坦性的一个推广.

定义 1 令 A 是一个序右 S -系, m 为固定的正整数. 如果对任意的 $a, a' \in A, s \in S$, 若 $a \otimes s^m = a' \otimes s^m$ 在 $A \otimes S$ 中成立, 则存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a \otimes s^n = a' \otimes s^n$ 在 $A \otimes Ss^n$ 中成立, 则称 A 为 (m, n) -主弱平坦的.

注 1 由定义 1, 一个序右 S -系 A 是 $(1, 1)$ -主弱平坦的当且仅当它是主弱平坦的, 我们后面将证明 (m, n) -主弱平坦性是比较主弱平坦性更广的一类性质.

设 I 是序幺半群 S 的真右理想, K 是序幺半群 S 的凸的真右理想. 我们将给出 $A(I)$ 和 S/K 是 (m, n) -主弱平坦系的充要条件.

首先, 我们考虑 $A(I)$ 何时是 (m, n) -主弱平坦的.

命题 1 令 I 是序幺半群 S 的真右理想, m 为固定的正整数. $A(I)$ 是 (m, n) -主弱平坦的当且仅当对任意 $s \in S - I, u \in S$, 若 $su^m \in I$, 则存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $j \in I$, 使得 $su^n = ju^n$.

证 必要性 对任意的 $s \in S - I$ 以及 $u \in S$, 若 $su^m \in I$, 则在 $A(I) \otimes S$ 中有

$$(x, s) \otimes u^m = (y, s) \otimes u^m$$

由于 $A(I)$ 是 (m, n) -主弱平坦的, 故存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$(x, s) \otimes u^n = (y, s) \otimes u^n$$

在 $A(I) \otimes Su^n$ 中成立. 那么由文献[8]的定理 5.2, 存在 $s_1, \dots, s_p, u_1, v_1, \dots, u_p, v_p \in S, \omega_1, \dots, \omega_p \in \{x, y, z\}$, 使得:

$$\begin{aligned} (x, s) &\leq (\omega_1, s_1)u_1 \\ (\omega_1, s_1)v_1 &\leq (\omega_2, s_2)u_2 & u_1u^n &\leq v_1u^n \\ (\omega_2, s_2)v_2 &\leq (\omega_3, s_3)u_3 & u_2u^n &\leq v_2u^n \\ &\vdots & &\vdots \\ (\omega_p, s_p)v_p &\leq (y, s) & u_pu^n &\leq v_pu^n \end{aligned}$$

令 $s = s_0v_0 = s_{p+1}u_{p+1}$. 由 $A(I)$ 的定义, 存在 $k \in \{0, 1, \dots, p\}, j \in I$, 使得 $s_kv_k \leq j \leq s_{k+1}u_{k+1}$. 因此, 我们有

$$su^n \leq s_1u_1u^n \leq \dots \leq s_kv_ku^n \leq ju^n \leq s_{k+1}u_{k+1}u^n \leq \dots \leq s_pu_pu^n \leq su^n$$

由于偏序关系具有反对称性, 我们有 $ju^n = su^n$.

充分性 对任意的 $a, a' \in A(I), u \in S$, 假设 $a \otimes u^m = a' \otimes u^m$ 在 $A(I) \otimes S$ 中成立. 因为 $(x, 1)S \cong S \cong (y, 1)S$, 即 $A(I)$ 是自由的序 S -系, 如果 $a, a' \in (x, 1)S$ 或 $a, a' \in (y, 1)S$, 那么 $A(I)$ 是 (m, n) -主弱平坦的. 那么不失一般性, 我们仅考虑 $a = (x, s), a' = (y, t) (s, t \in S - I)$ 的情形. 因为在 $A(I) \otimes S$ 中有 $(x, s) \otimes u^m = (y, t) \otimes u^m$, 那么 $su^m = tu^m \in I$. 由假设, 总可以找到某个 $n \in \mathbb{N}_+, j \in I$, 使得 $su^n = tu^n = ju^n$, 则

$$\begin{aligned} (x, s) \otimes u^n &= (x, 1) \otimes su^n = (x, 1) \otimes ju^n = (z, j) \otimes u^n = \\ &= (y, 1) \otimes ju^n = (y, 1) \otimes tu^n = (y, t) \otimes u^n \end{aligned}$$

在 $A(I) \otimes Su^n$ 中成立.

接下来我们考虑 Rees 商序 S -系 S/K 是 (m, n) -主弱平坦系的判别依据.

命题 2 设 K_S 是序幺半群 S 的凸真右理想, m 是固定的正整数. 以下条件等价:

(i) S/K 是 (m, n) -主弱平坦的;

(ii) 对任意 $s, u \in S$, 若 $su^m \in K$, 则存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $k, k' \in K$, 使得 $ku^n \leq su^n \leq k'u^n$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 假设 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的. 对任意的 $s, u \in S$, 如果 $su^m \in K$, 任取 $k \in K$, 显然在 $S/K \otimes S$ 中有

$$[s] \otimes u^m = [k] \otimes u^m$$

由于 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的, 因此存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 使得在 $S/K \otimes Su^n$ 中有

$$[s] \otimes u^n = [k] \otimes u^n$$

显然在 $S/K \otimes Su^n$ 中有

$$[1] \otimes su^n = [1] \otimes ku^n$$

由文献[3]的引理 4, 存在 $k_i, k'_i, l_j, l'_j \in K (i = 2, 3, \dots, p; j = 2, 3, \dots, q)$, 使得:

$$\begin{aligned} su^n &\leq k_2 u^n \\ k'_2 u^n &\leq k_3 u^n \\ &\vdots \\ k'_p u^n &\leq k u^n \\ k u^n &\leq l_2 u^n \\ l'_2 u^n &\leq l_3 u^n \\ &\vdots \\ l'_q u^n &\leq su^n \end{aligned}$$

由 $su^n \leq k_2 u^n$ 和 $l'_q u^n \leq su^n$, 结论得证. 当然, 如果 $su^n = ku^n$, 结论显然成立.

(ii) \Rightarrow (i) 假设 $s, t, u \in S$, 且在 $S/K \otimes S$ 中, $[s] \otimes u^m = [t] \otimes u^m$ 成立. 如果 $su^m = tu^m$, 那么自然地, $[s] \otimes u^m = [t] \otimes u^m$ 在 $S/K \otimes Su^m$ 中成立, 把 n 取成 m 即可. 否则, 由文献[3]的引理 3, $su^m, tu^m \in K_S$. 由假设, 总存在 $k_1, k'_1, k_2, k'_2 \in K$ 以及 $n \in \mathbb{N}_+$, 使得:

$$\begin{aligned} k_1 u^n &\leq su^n \leq k'_1 u^n \\ k_2 u^n &\leq tu^n \leq k'_2 u^n \end{aligned}$$

在 $S/K \otimes Su^n$ 中, 有

$$[1] \otimes su^n \leq [1] \otimes k'_1 u^n = [k'_1] \otimes u^n = [k_2] \otimes u^n = [1] \otimes k_2 u^n \leq [1] \otimes tu^n$$

且

$$[1] \otimes tu^n \leq [1] \otimes k'_2 u^n = [k'_2] \otimes u^n = [k_1] \otimes u^n = [1] \otimes k_1 u^n \leq [1] \otimes su^n$$

即 $[s] \otimes u^n = [t] \otimes u^n$ 在 $S/K \otimes Su^n$ 中成立.

如果 K_S 是序么半群 S 的凸真右理想, 且满足命题 2 的条件 (ii), 则我们称 K_S 是 (m, n) -左稳定化右理想. 文献[3]中左稳定化右理想就是这里所讲的 $(1, 1)$ -左稳定化右理想.

由文献[6], 如 K 是序么半群 S 的右理想, 那么 K 是序么半群 S 的凸右理想当且仅当 $[K] = K$.

文献[3]研究了经典的平坦系列性质, 如自由、投射、强平坦和条件(P)等, 且这些性质之间的关系如下: 自由 \Rightarrow 投射 \Rightarrow 强平坦 \Rightarrow 条件(P) \Rightarrow (m, n) -主弱平坦.

接下来, 我们考虑 (m, n) -主弱平坦序 S -系的同调分类问题. 首先, 我们给出所有(有限生成)序右 S -系是 (m, n) -主弱平坦的序么半群的刻画.

定理 1 对任意序么半群 S 以及固定的正整数 m , 以下几条等价:

- (i) 所有序右 S -系是 (m, n) -主弱平坦的;
- (ii) 所有有限生成的序右 S -系是 (m, n) -主弱平坦的;
- (iii) 对任意的 $s \in S$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $x \in S$, 使得 $s^n = s^m x s^n$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 显然.

(ii) \Rightarrow (iii) 设 $s \in S$, 如果 $s^m S = S$, 显然存在 $x \in S$, 使得 $1 = s^m x$. 因此, 对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $s^n = s^m x s^n$, 否则 $s^m S$ 是 S 的真右理想. 令 $I = s^m S$, 由于 $A(I)$ 是有限生成的序右 S -系, 由假设, $A(I)$

是 (m, n) -主弱平坦的. 因为 $s^m \in I$, 由命题 1, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $j \in I$, 使得 $s^n = js^n$. 因此存在 $x \in S$, 使得 $j = s^m x$, 从而 $s^n = s^m x s^n$.

(iii) \Rightarrow (i) 假设 A 是序右 S -系. 对任意的 $s \in S$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$, $x \in S$, 使得 $s^n = s^m x s^n$. 对任意 $a, a' \in A$, 如果 $a \otimes s^m = a' \otimes s^m$ 在 $A \otimes S$ 中成立, 那么

$$a \otimes s^n = a \otimes s^m x s^n = a s^m \otimes x s^n = a' s^m \otimes x s^n = a' \otimes s^m x s^n = a' \otimes s^n$$

在 $A \otimes S s^n$ 中成立.

例 1 在定理 1 中, 若取 $m = 2$, 则下面的序么半群 S 满足定理 1 的第 (ii) 条, 但不是正则的序么半群, 说明 (m, n) -主弱平坦性是比较主弱平坦性更广的性质:

设 S 是实数集上全体 $n \geq 2$ 阶严格上三角形矩阵和 2 阶单位矩阵构成的集合. 在 S 上规定乘法运算为: 当两个同阶矩阵相乘时为普通矩阵的乘法; 当两个不同阶矩阵相乘时取阶数较大的矩阵. 按照这个乘法, S 构成么半群, 单位元 $\mathbf{1}$ 就是 2 阶单位矩阵. 以下用 $\mathbf{0}_n$ 表示 n 阶零矩阵, 用 $\mathbf{0}$ 表示 S 中任意阶零矩阵. 显然, 对任意的 $\mathbf{0}, \mathbf{1} \neq s \in S$, 由 S 的构造, s 必为某个 n 阶严格上三角矩阵, 那么显然有 $s^n = \mathbf{0}_n = s^2 x s^n$, 这里 x 是 S 中任意一个阶数不大于 n 的矩阵, 但 s 未必正则, 因为如果存在 $y \in S$, 使得 $s = s y s$, 当 s 的阶数大于 y 的阶数时, $s y s = s s = s^2 = s$, 必有某个 n , 使得 $s = s^n = \mathbf{0}_n$, 矛盾; 当 s 的阶数等于 y 的阶数时, $s y$ 不可能为单位元, 显然由 $s = s y s$ 可知 $s y$ 为幂等元, 故存在某个自然数 n , 使得 $s y = \mathbf{0}_n = s$, 矛盾; 当 s 的阶数小于 y 的阶数时, $s = s y s = y$, 矛盾.

定理 2 对任意序么半群 S 以及固定的正整数 m , 以下几条等价:

- (i) 所有右 Rees 商序 S -系是 (m, n) -主弱平坦的;
- (ii) 对任意 $s \in S$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 以及 $s', s'' \in S$, 使得 $s^m s' s^n \leq s^n \leq s^m s'' s^n$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 对任意的 $s \in S$, $[s^m S]$ 是 S 的凸右理想. 如果 $[s^m S] = S$, 那么由文献[6]的引理 2.2, 存在 $u, v \in S$, 使得 $s^m u \leq \mathbf{1} \leq s^m v$. 用 s^n 右乘, 我们得到

$$s^m u s^n \leq s^n \leq s^m v s^n$$

如果 $[s^m S] \neq S$, 那么 $[s^m S]$ 是 S 的凸真右理想. 由于 $s^m \in [s^m S]$, 由命题 2, 存在 $k, k' \in [s^m S]$, 使得 $k s^n \leq s^n \leq k' s^n$. 因为 $k \in [s^m S]$, 存在 $x_1, y_1 \in S$, 使得 $s^m x_1 \leq k \leq s^m y_1$. 用 s^n 右乘, 我们得到

$$s^m x_1 s^n \leq k s^n \leq s^m y_1 s^n$$

另一方面, 因为 $k' \in [s^m S]$, 存在 $x_2, y_2 \in S$, 使得 $s^m x_2 \leq k' \leq s^m y_2$. 用 s^n 右乘, 我们有

$$s^m x_2 s^n \leq k' s^n \leq s^m y_2 s^n$$

因此我们有

$$s^m x_1 s^n \leq k s^n \leq s^n \leq k' s^n \leq s^m y_2 s^n$$

(ii) \Rightarrow (i) 让 K 是序么半群 S 的凸右理想, 我们将证明 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的. 如果 $K = S$, 易知 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的, 否则 K 是序么半群 S 的凸真右理想. 对任意的 $u, v, s \in S$, 假设 $[u] \otimes s^m = [v] \otimes s^m$. 如果 $u s^m = v s^m$, 显然 $[u] \otimes s^m = [v] \otimes s^m$ 在 $S/K \otimes S s^m$ 中成立, 取 n 等于 m 即可. 否则, 由文献[3]的引理 3, 我们有 $u s^m, v s^m \in K$. 由第 (ii) 条, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $s', s'' \in S$, 使得

$$s^m s' s^n \leq s^n \leq s^m s'' s^n$$

因此在 $S/K \otimes S s^n$ 中, 有

$$[u] \otimes s^n \leq [u] \otimes s^m s'' s^n = [u s^m s''] \otimes s^n = [v s^m s'] \otimes s^n = [v] \otimes s^m s' s^n \leq [v] \otimes s^n$$

且

$$[v] \otimes s^n \leq [v] \otimes s^m s'' s^n = [v s^m s''] \otimes s^n = [u s^m s'] \otimes s^n = [u] \otimes s^m s' s^n \leq [u] \otimes s^n$$

故在 $S/K \otimes S s^n$ 中 $[u] \otimes s^n = [v] \otimes s^n$ 成立.

推论 1 对任意序么半群 S , 以下几条等价:

- (i) 所有 Rees 商序 S -系是主弱平坦的;

(ii) 对任意的 $s \in S$, 存在 $s', s'' \in S$, 使得 $ss's \leq s \leq ss''s$.

例 2 设 S 是一个诣零的序幺半群(对任意的 $1 \neq s \in S$, 存在 $n \in \mathbb{N}_+$, 使得 $s^n = 0$), 很容易证明: 对任意的 $s \in S$, 如果 $1 \neq s$, 那么 $sS \neq S$ 且 $Ss \neq S$. 易知 S 满足定理 2 的 (ii), 但是它不满足推论 1 的 (ii). 因为对任意的 $s \in S$, 如果存在 $s', s'' \in S$, 使得 $ss's \leq s \leq ss''s$, 那么对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$,

$$(ss')^n s \leq s \leq s(ss'')^n$$

若 $s \notin \{0, 1\}$, 那么 $(ss')^n s \leq s \leq s(ss'')^n$ 使得 $s = 0$, 矛盾.

接下来, 我们考虑 Rees 商序 S -系的 (m, n) -主弱平坦性与其余经典平坦性质的一致性, 即同调分类问题.

定理 3 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m , 以下条件等价:

(i) 所有 (m, n) -主弱平坦右 Rees 商序 S -系是自由的;

(ii) $S = \{1\}$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 因为 Θ_S 是 (m, n) -主弱平坦的, 由假设, Θ_S 是自由的. 由文献[3]的定理 1, 我们得到 $S = \{1\}$.

(ii) \Rightarrow (i) 显然.

定理 4 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m , 以下条件等价:

(i) 所有 (m, n) -主弱平坦右 Rees 商序 S -系是投射的;

(ii) S 有左零元, 且 S 没有真的 (m, n) -左稳定凸右理想 K , 使得 $|K| > 1$.

证 (i) \Rightarrow (ii) 由于 Θ_S 是 (m, n) -主弱平坦的, 由假设, Θ_S 是投射的. 由文献[3]的定理 1 可知 S 有一个左零元. 假设 S 有一个真广义左稳定凸右理想 K , 使得 $|K| > 1$. 由命题 2, S/K 是 (m, n) -主弱平坦的, 因此它是投射的, 由文献[6]的引理 1.8, $|K| = 1$, 矛盾.

(ii) \Rightarrow (i) 设 K 是序幺半群 S 的凸右理想, 且 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的. 如果 K 是序幺半群 S 的凸真右理想, 由命题 2, K 是序幺半群 S 的一个真广义左稳定凸右理想. 由假设知 $|K| = 1$, 故是 S/K 投射的. 如果 $K = S$, 则 $S/K \simeq \Theta_S$ 是 (m, n) -主弱平坦的. 因为 S 有左零元, 由文献[3]的定理 1, S/K 是投射的.

定理 5 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m , 以下几条等价:

(i) 所有 (m, n) -主弱平坦右 Rees 商序 S -系是强平坦的;

(ii) S 是可收缩的, 且 S 没有真的 (m, n) -左稳定化凸右理想 K , 使得 $|K| > 1$.

证 (i) \Rightarrow (ii) Θ_S 是 (m, n) -主弱平坦的, 由假设, Θ_S 是强平坦的. 由文献[3]的定理 1 可得 S 是左可收缩的. 假设 S 有真 (m, n) -左稳定化凸右理想 K , 使得 $|K| > 1$. 由命题 2, S/K 是 (m, n) -主弱平坦的, 由文献[6]的引理 1.8, 它是强平坦的, 可得 $|K| = 1$, 矛盾.

(ii) \Rightarrow (i) 令 K 是序幺半群 S 的一个凸右理想, S/K 是 (m, n) -主弱平坦的. 如果 K 是序幺半群 S 的凸真右理想, 由命题 2, K 是 S 的一个真的 (m, n) -左稳定化凸右理想. 由假设, $|K| = 1$, 即 S/K 是强平坦的. 如果 $K = S$, 则 $S/K \simeq \Theta_S$ 是 (m, n) -主弱平坦的. 由于 S 是左可收缩的, 故由文献[3]的定理 1 知 S/K 是强平坦的.

定理 6 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m , 以下条件等价:

(i) 所有 (m, n) -主弱平坦右 Rees 商序 S -系满足条件(P);

(ii) S 是弱右可逆的, 且 S 没有真的 (m, n) -左稳定化凸右理想 K , 使得 $|K| > 1$.

证 (i) \Rightarrow (ii) Θ_S 是 (m, n) -主弱平坦的, 由假设, Θ_S 满足条件(P). 由文献[3]的定理 1 可知 S 是弱右可逆的. 假设 S 有一个真 (m, n) -左稳定化凸右理想 K , 且 $|K| > 1$. 由命题 2, S/K 是 (m, n) -主弱平坦的, 因此它满足条件(P), 且由文献[6]的引理 1.8, $|K| = 1$, 矛盾.

(ii) \Rightarrow (i) K 是序幺半群 S 的凸右理想, 且 S/K 是 (m, n) -主弱平坦的. 如果 K 是 S 的一个凸真右理想, 由命题 2, K 是 S 的一个真 (m, n) -左稳定化右理想. 由假设, $|K| = 1$, 且 S/K 满足条件(P). 但

是若 $K = S$, 则 $S/K \simeq \Theta_S$ 是 (m, n) -主弱平坦的. 由于 S 是弱右可逆的, 由文献[3]的定理 1 可得 S/K 满足条件(P).

注 2 本文的研究结果针对任意的序 S -系. 很自然地, 如果将序么半群及序 S -系的偏序都取成离散序, m, n 都取成 1, 则很容易得到文献[7]中 S -系的相关结果.

参考文献:

- [1] BULMAN-FLEMING S, LAAN V. Lazard's Theorem for S -Posets [J]. Math Nachr, 2005, 278(15): 1743–1755.
- [2] BULMAN-FLEMING S, MAHMOUDI M. The Category of S -Posets [J]. Semigroup Forum, 2005, 71(3): 443–461.
- [3] BULMAN-FLEMING S, GUTERMUTH D, GILMOUR A, et al. Flatness Properties of S -Posets [J]. Comm Alg, 2006, 34(4): 1291–1317.
- [4] QIAO Hu-sheng, LI Fang. When All S -Posets Are Principally Weakly Flat [J]. Semigroup Forum, 2007, 75(3): 536–542.
- [5] QIAO Hu-sheng, LI Fang. The Flatness Properties of S -Poset $A(I)$ and Rees Factor S -Posets [J]. Semigroup Forum, 2008, 77(2): 306–315.
- [6] QIAO Hu-sheng, LIU Zhong-kui. On the Homological Classification of Pomonoids by Their Rees Factor S -Posets [J]. Semigroup Forum, 2009, 79(2): 385–399.
- [7] QIAO Hu-sheng, WEI Chong-qing. On a Generalization of Principal Weak Flatness Property [J]. Semigroup Forum, 2012, 85(1): 147–159.
- [8] SHI Xiao-ping, LIU Zhong-kui, WANG Fang-gui, et al. Indecomposable, Projective and Flat S -Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(1): 235–251.
- [9] SHI Xiao-ping. Strongly Flat and Po-Flat S -Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(12): 4515–4531.

On (m, n) -Principally Weakly Flat S -Posets

QIAO Hu-sheng, CHEN Xiao-fei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let S be a pomonoid and m, n be positive integrals. In this paper, we give a generalization of principally weakly flat S -poset and call it (m, n) -principally weakly flat poset. On this new property, the homological classification problems of S -posets are investigated. As applications, some known results are extended.

Key words: principal weak flatness; homological classification; S -poset

责任编辑 廖 坤

