DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.012

一类包含 Smarandache 函数的条件方程的可解性问题①

陈 斌

渭南师范学院 数学与信息科学学院,陕西 渭南 714099

摘要: 研究了一类包含 Smarandache 函数与 Euler 函数的经典函数方程的可解性问题,利用初等数论和分析的方法,讨论了这类条件方程在指数为奇数时解的情况,得到了一些有趣的结果.

关 键 词: Smarandache 函数;函数方程;可解性问题

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2015)08-0071-05

著名的 Smarandache 函数 $s(n)$ 定义为:存在最小正整数 m,使得 $n \mid m!$. 易知

$$s(n)=\min\{m: m \in \mathbb{N}_+, n \mid m!\}$$

许多学者对包含 Smarandache 函数 $s(n)$ 与 Euler 函数的方程

$$s(n^k)=\varphi(n) \tag{1}$$

进行了深入的研究[1-5],得到了一些漂亮的结果.

性质 1[6] 若正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,则

$$s(n)=\max\{s(p_1^{\alpha_1}), s(p_2^{\alpha_2}), \cdots, s(p_s^{\alpha_s})\}$$

性质 2[7] 若 $p+q$ 为素数,则当 $1 \leqslant \lambda \leqslant (p+q)(p+q+1)$ 时,可得

$$s((p+q)^\lambda)=\left(\lambda-\left[\frac{\lambda}{p+q+1}\right]\right)(p+q)$$

其中 $\left[\frac{\lambda}{p+q+1}\right]$ 表示对实数 $\frac{\lambda}{p+q+1}$ 取整.

性质 3[6] 对素数 p 和正整数 k 有 $s(p^\lambda) \leqslant \lambda p$. 特别地,当 $\lambda < p$ 时,有 $s(p^\lambda)=\lambda p$.

对于函数方程(1)中的指数 k,文献[6]得出:$k=1$ 时,方程(1)仅有解 $n=1,8,9,12,18$. 文献[8]证明了 $k=2,3,4$ 时解的情况. 文献[7]对指数 k 为偶数时的情况进行了分类讨论,得到了其对应的解的具体形式,给出了几个有趣的结果. 这个问题吸引了作者的思考,本文利用文献[7]的方法对指数 k 为奇数时的各类情况进行了讨论,即讨论了条件方程

$$s(n^{2k+1})=\varphi(n) \tag{2}$$

解的情况,给出了其满足特定条件的一些解与非解的具体形式.

定理 1 对于任意的正整数 k,当 $4k+3$ 为素数时,方程(2)有解 $n=(4k+3)^2$ 和 $n=2(4k+3)^2$.

① 收稿日期:2013-10-22
基金项目:国家自然科学青年基金项目(61402335);陕西省科技厅自然科学基金项目(2014JQ1006);渭南师范学院基金项目(14SKYB21,15YKF005);省级数学重点学科资助项目.
作者简介:陈 斌(1979-),男,陕西咸阳人,副教授,主要从事数论和模形式的研究.

定理 2 若 $p=4m+3$ 为素数，$m\in\mathbb{N}_+$，$p\geqslant 7$，当 $p+2$ 也是素数时，则 $n=p^2(p+2)$ 和 $n=2p^2(p+2)$，及 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 均不是方程(2)的解，其中

$$k=\frac{1}{4}(p-3)(p+2)$$

定理 3 若 $p=8m+1$ 为素数，$m\in\mathbb{N}_+$，$p\geqslant 17$，当 $p+2$ 是素数时，则 $n=p^2(p+2)$ 和 $n=2p^2(p+2)$，及 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 都不是方程(2)的解，其中

$$k=\frac{1}{8}(p-1)(p+2)$$

定理 1 的证明 对于任意的正整数 k，若 $4k+3$ 为素数，当 $n=(4k+3)^2$ 时，则易知

$$s(n^{2k+1})=s(((4k+3)^2)^{2k+1})=s((4k+3)^{4k+2})$$

由性质 3 可得

$$s(n^{2k+1})=s((4k+3)^{4k+2})=(4k+2)(4k+3)$$

而我们知道

$$\varphi(n)=\varphi((4k+3)^2)=(4k+2)(4k+3)$$

因此，当 $4k+3$ 为素数时，$n=(4k+3)^2$ 是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

当 $n=2(4k+3)^2$ 时，同理可知

$$s(n^{2k+1})=s((2(4k+3)^2)^{2k+1})=\max\{s(2^{2k+1}),s((4k+3)^{4k+2})\}=$$
$$s((4k+3)^{4k+2})=(4k+2)(4k+3)$$

因此，当 $4k+3$ 为素数时，$n=2(4k+3)^2$ 也是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

定理 2 的证明 当 $n=p^2(p+2)$ 时，根据 Smarandache 函数的性质可得

$$s(n^{2k+1})=s((p^2(p+2))^{2k+1})=\max\{s(p^{4k+2}),s((p+2)^{2k+1})\}$$

由 $4k=(p-3)(p+2)<p(p+1)$，根据性质 2，可知

$$s(p^{4k+2})=\left((4k+2)-\left[\frac{4k+2}{p+1}\right]\right)p=\left\{((p-3)(p+2)+2)-\left[\frac{(p-3)(p+2)+2}{p+1}\right]\right\}p=$$
$$\left\{((p-3)(p+2)+2)-\left[\frac{(p-3)(p+1)+(p-3)+2}{p+1}\right]\right\}p=$$
$$\{((p-3)(p+2)+2)-(p-3)-1\}p=[(p-3)(p+1)+1]p$$

而

$$2k=\frac{1}{2}(p-3)(p+2)<(p+2)(p+3)$$

则

$$s((p+2)^{2k+1})=\left\{2k+1-\left[\frac{2k+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$
$$\left\{\frac{1}{2}(p-3)(p+2)+1-\left[\frac{\frac{1}{2}(p-3)(p+2)+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$
$$\left\{\frac{1}{2}(p-3)(p+2)+1-\left[\frac{\frac{1}{2}(p-3)(p+2)-\frac{1}{2}(p-3)+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$
$$\left\{\frac{1}{2}(p-3)(p+2)+1-\left[\frac{1}{2}(p-3)-1\right]\right\}(p+2)=$$
$$\left[\frac{1}{2}(p-3)(p+2-1)+1+1\right](p+2)=\left[\frac{1}{2}(p-3)(p+1)+2\right](p+2)$$

这里我们构造函数

$$f(x)=[(x-3)(x+1)+1]x-\left[\frac{1}{2}(x-3)(x+1)+2\right](x+2)=\frac{1}{2}x^3-2x^2-\frac{1}{2}x-1$$

易求得

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-4x-\frac{1}{2}$$

而当 $x\geqslant 5$ 时，

$$f'(x)>f'(5)=17>0$$

因此 $f(x)$ 在$[5,+\infty]$ 上严格单调递增. 由于 $f(5)=9>0$，则在$[5,+\infty]$ 上恒有 $f(x)>0$. 故此时可得

$$[(x-3)(x+1)+1]x>\left[\frac{1}{2}(x-3)(x+1)+2\right](x+2)$$

即当 $x\geqslant 5$ 时，

$$s(p^{4k+2})>s((p+2)^{2k+1})$$

那么

$$s(n^{2k+1})=s(p^{4k+2})=[(p-3)(p+1)+1]p$$

而当 $n=p^2(p+2)$ 时，

$$\varphi(n)=\varphi(p^2(p+2))=(p-1)p(p+1)$$

显然，$s(n^{2k+1})\neq\varphi(n)$，所以 $n=p^2(p+2)$ 不是 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

对于第二类情况，当 $n=2p^2(p+2)$ 时，同理可知

$$\begin{aligned}s(n^{2k+1})&=s((2p^2(p+2))^{2k+1})=\\&\max\{s(2^{2k+1}),s(p^{4k+2}),s((p+2)^{2k+1})\}=\\&s(p^{4k+2})=[(p-3)(p+1)+1]p\end{aligned}$$

此时

$$\varphi(n)=\varphi(2p^2(p+2))=(2-1)(p-1)p(p+1)=(p-1)p(p+1)$$

可得

$$s(n^{2k+1})\neq\varphi(n)$$

从而可知 $n=2p^2(p+2)$ 也不是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

同理可证 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 都不是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

定理 3 的证明　当 $n=p^2(p+2)$ 时，由函数性质可知

$$s(n^{2k+1})=s((p^2(p+2))^{2k+1})=\max\{s(p^{4k+2}),s((p+2)^{2k+1})\}$$

此时

$$8k=(p-1)(p+2)\qquad 4k=\frac{1}{2}(p-1)(p+2)<p(p+1)$$

根据性质 2，可得

$$\begin{aligned}s(p^{4k+2})&=\left(4k+2-\left[\frac{4k+2}{p+1}\right]\right)p=\left(\frac{1}{2}(p-1)(p+2)+2-\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)(p+2)+2}{(p+1)}\right]\right)p=\\&\left(\frac{1}{2}(p-1)(p+2)+2-\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)(p+1)+\frac{1}{2}(p-1)+2}{(p+1)}\right]\right)p=\\&\left(\frac{1}{2}(p-1)(p+2)+2-\left[\frac{1}{2}(p-1)+1\right]\right)p=\left(\frac{1}{2}(p-1)(p+1)+1\right)p\end{aligned}$$

由

$$2k=\frac{1}{4}(p-1)(p+2)<(p+2)(p+3)$$

可推出

$$s((p+2)^{2k+1})=\left\{2k+1-\left[\frac{2k+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$

$$\left\{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)+1-\left[\frac{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$

$$\left\{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)+1-\left[\frac{\frac{1}{4}(p-1)(p+3)-\frac{1}{4}(p-1)+1}{p+3}\right]\right\}(p+2)=$$

$$\left\{\frac{1}{4}(p-1)(p+2)+1-\left[\frac{1}{4}(p-1)-1\right]\right\}(p+2)=\left\{\frac{1}{4}(p-1)(p+1)+2\right\}(p+2)$$

构造函数

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}(x-1)(x+1)+1\right]x-\left[\frac{1}{4}(x-1)(x+1)+2\right](x+2)=$$

$$\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}$$

可求得

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-x-\frac{5}{4}$$

而当 $x\geqslant 4$ 时,

$$f'(x)>f'(4)=\frac{27}{4}>0$$

因此,可推出 $f(x)$ 在 $[4,+\infty]$ 上严格单调递增. 再由 $f(4)=\frac{5}{4}>0$ 可知,$f(x)>0$ 在 $[4,+\infty]$ 上恒成立. 故有

$$\left[\frac{1}{2}(x-1)(x+1)+1\right]x>\left[\frac{1}{4}(x-1)(x+1)+2\right](x+2)$$

从而当 $p\geqslant 4$ 时,

$$s(p^{4k+2})>s((p+2)^{2k+1})$$

这时可知

$$s(n^{2k+1})=s(p^{4k+2})=\left[\frac{1}{2}(p-1)(p+1)+1\right]p$$

而当 $n=p^2(p+2)$ 时,

$$\varphi(n)=\varphi(p^2(p+2))=(p-1)p(p+1)$$

故 $n=p^2(p+2)$ 不是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

对于 $n=2p^2(p+2)$ 时,可知

$$s(n^{2k+1})=s((2p^2(p+2))^{2k+1})=\max\{s(2^{2k+1}),s(p^{4k+2}),s((p+2)^{2k+1})\}=$$

$$s(p^{4k+2})=\left[\frac{1}{2}(p-1)(p+1)+1\right]p$$

而易得

$$\varphi(n)=\varphi(2p^2(p+2))=(2-1)(p-1)p(p+1)=(p-1)p(p+1)$$

因此

$$s(n^{2k+1})\neq\varphi(n)$$

即 $n=2p^2(p+2)$ 不是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

同理可证 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 都不是方程 $s(n^{2k+1})=\varphi(n)$ 的解.

参考文献：

[1] 张文鹏，李海龙. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[2] 陈　斌. 一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(2)：70－73.

[3] 赵教练. 关于 Smarandache 方程的可解性 [J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2011(3)：68－72.

[4] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York：Springer-Verlag，1976.

[5] 潘承洞，潘承彪. 初等数论 [M]. 2 版. 北京：北京大学出版社，2004.

[6] MA Jin-Ping. An Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna，2005，1(2)：89－90.

[7] 陈　斌. 一类 Smarandache 方程的可解性问题 [J]. 数学杂志，2013，33(5)：923－928.

[8] YI Yuan. An Equation Involving the Euler Function and Smarandache Function [J]. Scientia Magna，2005，1(2)：172－175.

On the Solvability Problem of a Class of Condition Equations Involving the Smarandache Function

CHEN　Bin

College of Mathematics and Information sciences，Weinan Normal University，Weinan Shaanxi 714099，China

Abstract：In this paper，the solvability problem of a class of classic function equations involving the Smarandache function and the Euler function is studied. Under the condition that the index is an odd number，the solutions of the condition function equations are discussed by using the elementary number theory and the analysis methods. As a result，some interesting results are obtained which may enrich and improve this problem of the Smarandache function.

Key words：Smarandache function；function equation；solvability problem

责任编辑　廖　坤