第 37 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2015 年 8 月
Vol. 37　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.013

一类含有 p 次幂的 Volterra-Fredholm 型非线性迭代积分不等式①

卢钰松，　王五生

河池学院 数学与统计学院，广西 宜州 546300

摘要：研究了一类含有 p 次幂的 Volterra-Fredholm 型迭代积分不等式. 利用变量替换、放大方法、微分、积分和逆函数等不等式技巧给出了不等式中未知函数的估计，推广了相应的结果. 为了说明结果的有效性，用所得结果给出了一类 Volterra-Fredholm 型积分方程解的估计.

关　键　词：积分不等式；迭代积分；p 次幂；估计

中图分类号：O175.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2015)08－0076－05

文献[1] 研究了下面的积分不等式：

$$u(t) \leqslant c + \int_a^t f(s)u(s)\mathrm{d}s \qquad t \in [a, b]$$

其中 $c \geqslant 0$ 是常数，u 和 f 是区间$[a, b]$上的非负连续函数. 推出了不等式中未知函数 u 的估计式：

$$u(t) \leqslant c\exp\left(\int_a^t f(s)\mathrm{d}s\right) \qquad t \in [a, b] \tag{1}$$

由于 Gronwall-Bellman 型积分不等式在研究微分方程和积分方程解的定性性质和定量性质中的重要作用，人们不断地对它的形式进行各种推广，使它的应用范围不断扩大(参见文献[2－10]). 文献[2] 研究了一元积分不等式

$$u(t) \leqslant a(t) + \sum_{i=1}^{n}\int_{b_i(t_0)}^{b_i(t)} g_i(t, s)w_i(u(s))\mathrm{d}s$$

文献[3] 讨论了二元积分不等式

$$u^p(x, y) \leqslant a + \frac{p}{p-q}\int_{b_1(x_0)}^{b_1(x)}\int_{c_1(y_0)}^{c_1(y)} g_1(s, t)u^q(s, t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \frac{p}{p-q}\int_{b_2(x_0)}^{b_2(x)}\int_{c_2(y_0)}^{c_2(y)} g_2(s, t)u^q(s, t)\psi(u(s, t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

文献[4] 研究了非线性 Volterra-Fredholm 型时滞积分不等式

$$u(t) \leqslant k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \sigma_1(s)\left[f(s)w(u(s)) + \int_{\alpha(t_0)}^{s}\sigma_2(\tau)w(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} \sigma_1(s)\left[f(s)w(u(s)) + \int_{\alpha(t_0)}^{s}\sigma_2(\tau)w(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s \qquad \forall t \in I \tag{2}$$

---

① 收稿日期：2014－10－18

基金项目：国家自然科学基金项目(11161018)；广西省自然科学基金项目(2012GXNSFAA053009)；广西高等学校科研项目(KY2015ZD103，KY2015YB257).

作者简介：卢钰松(1979－)，女，广西罗城人，讲师，主要从事微分方程的研究.

通信作者：王五生，教授.

文献[5]研究了含有 p 次幂的迭代积分不等式

$$u(t) \leqslant k + \int_0^t f(s)u(s)\left[u(s) + \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s \tag{3}$$

受文献[2，4－5]的启发，本文研究了一类含有 p 次幂的 Volterra-Fredholm 型迭代积分不等式

$$u(t) \leqslant k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s) + \int_{t_0}^s g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s) + \int_{t_0}^s g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s \qquad t \in [t_0, T] \tag{4}$$

其中 k 是正常数.(4)式与(2)式比较，(4)式的积分中含有 p 次幂，积分号内含有未知函数 u 与两个不同的非线性函数 ϕ_1, ϕ_2 的复合函数.(4)式与(3)式比较，(4)式把(3)式中的未知函数 u 推广成未知函数 u 与两个不同的非线性函数 ϕ_1, ϕ_2 的复合函数，(4)式把 Volterra 型积分不等式(3)推广成 Volterra-Fredholm 型积分不等式.(2)式与(3)式的结果都不能用来估计(4)式中的未知函数.

1 主要结果

在本文中，$\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合，$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$，$I = [t_0, T]$，$t_0$ 和 T 是正的实常数.为了叙述的方便，我们用不等式(4)中的函数 ϕ_1, ϕ_2 定义下面的函数：

$$\Phi_1(z) = \int_c^z \frac{\mathrm{d}s}{\phi_2(s)} \qquad c > 0,\ z \in (0, +\infty) \tag{5}$$

$$\Phi_2(z) = \int_c^z \frac{\phi_2(\Phi_1^{-1}(s))\mathrm{d}s}{\phi_1(\Phi_1^{-1}(s))[\Phi_1^{-1}(s)]^p} \qquad c > 0,\ z \in (0, +\infty) \tag{6}$$

其中 $\phi_1, \phi_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$，并且满足：当 $u > 0$ 时，$\phi_i(u) > 0 (i = 1,2)$.

定理1 假设 k, p 是正常数，$g_1(t), g_2(t) \in C(I, \mathbb{R}_+)$；$\alpha \in C^1([t_0, T], [t_0, T])$ 是单调不减的函数，且满足 $\alpha(t_0) = t_0$，$\alpha(t) \leqslant t$；$\phi_1, \phi_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$，$\phi_1(u), \phi_2(u)$ 和 $\dfrac{\phi_1(u)u^p}{\phi_2(u)}$ 都是单调不减的函数，并且满足：当 $u > 0$ 时，$\phi_i(u) > 0 (i = 1,2)$.假设(5)式和(6)式中定义的函数 Φ_1, Φ_2 具有性质：$\Phi_1(+\infty) = +\infty$，$\Phi_2(+\infty) = +\infty$. $G(u) = \Phi_2[\Phi_1(2u - k)] - \Phi_2\left(\Phi_1(u) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_2(s)\mathrm{d}s\right)$ 在区间 $[k, \infty)$ 上是 u 的严格增函数.如果函数 u 满足不等式(4)，则有未知函数 u 的估计式：

$$u(t) \leqslant \Phi_1^{-1}\left\{\Phi_2^{-1}\left[\Phi_2\left(\Phi_1\left(G^{-1}\left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_1(s)\mathrm{d}s\right)\right) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_2(s)\mathrm{d}s\right) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} g_1(s)\mathrm{d}s\right]\right\} \qquad t \in [t_0, T] \tag{7}$$

其中 Φ_1^{-1}, Φ_2^{-1} 和 G^{-1} 分别是 Φ_1, Φ_2 和 G 的逆函数.

证 把不等式(4)的右端记为函数 $v(t)$，即

$$v(t) = k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s) + \int_{t_0}^s g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s) + \int_{t_0}^s g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s \qquad t \in [t_0, T] \tag{8}$$

可以看出 $v(t)$ 是区间 $[t_0, T]$ 上正的不减函数，且有：

$$v(t_0) = k + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)} g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s) + \int_{t_0}^s g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \mathrm{d}s \tag{9}$$

$$u(t) \leqslant v(t) \qquad t \in [t_0, T] \tag{10}$$

求函数 $v(t)$ 的导数，利用关系式(10)得到

$$v'(t) = \alpha'(t)g_1(\alpha(t))\phi_1(u(\alpha(t)))\left[u(\alpha(t)) + \int_{t_0}^{\alpha(t)} g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p \leqslant$$

$$\alpha'(t)g_1(\alpha(t))\phi_1(v(\alpha(t)))\left[v(t)+\int_{t_0}^{\alpha(t)}g_2(\tau)\phi_2(v(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p\leqslant$$
$$\alpha'(t)g_1(\alpha(t))\phi_1(v(\alpha(t)))v_1^p(t)\qquad t\in[t_0,T]\tag{11}$$

其中

$$v_1(t)=v(t)+\int_{t_0}^{\alpha(t)}g_2(\tau)\phi_2(v(\tau))\mathrm{d}\tau\qquad t\in[t_0,T]\tag{12}$$

可以看出 $v_1(t)$ 是区间$[t_0,T]$上正的不减函数，且有

$$v_1(t_0)=v(t_0)\qquad v(t)\leqslant v_1(t)\qquad t\in[t_0,T]\tag{13}$$

求函数 $v_1(t)$ 的导数，得

$$v'_1(t)=v'(t)+\alpha'(t)g_2(\alpha(t))\phi_2(v(\alpha(t)))\tag{14}$$

由(11)式,(13)和(14)式得

$$v'_1(t)\leqslant\alpha'(t)g_1(\alpha(t))\phi_1(v(\alpha(t)))v_1^p(t)+\alpha'(t)g_2(\alpha(t))\phi_2(v(\alpha(t)))\leqslant$$
$$\alpha'(t)[g_1(\alpha(t))\phi_1(v_1(\alpha(t)))v_1^p(t)+g_2(\alpha(t))\phi_2(v_1(\alpha(t)))]\tag{15}$$

用$\dfrac{\mathrm{d}t}{\phi_2(v_1(\alpha(t)))}$乘以不等式(15)的两边，利用 ϕ_2 和 v_1 的单调性得到

$$\frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\phi_2(v_1(t))}\leqslant\alpha'(t)\left[g_1(\alpha(t))\frac{\phi_1(v_1(\alpha(t)))v_1^p(t)}{\phi_2(v_1(\alpha(t)))}+g_2(\alpha(t))\right]\mathrm{d}t\tag{16}$$

不等式(16)的两边关于 t 积分，得

$$\Phi_1(v_1(t))\leqslant\Phi_1(v_1(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_2(s)\mathrm{d}s+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\frac{\phi_1(v_1(s))v_1^p(\alpha^{-1}(s))}{\phi_2(v_1(s))}\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\Phi_1(v_1(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\frac{\phi_1(v_1(s))v_1^p(\alpha^{-1}(s))}{\phi_2(v_1(s))}\mathrm{d}s\tag{17}$$

对 $\forall t\in[t_0,T]$ 成立，其中 Φ_1 在公式(5)中已经定义.

用与上面类似的方法，用不等式(17)的右端定义函数 $v_2(t)$，即

$$v_2(t)=\Phi_1(v_1(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\frac{\phi_1(v_1(s))v_1^p(\alpha^{-1}(s))}{\phi_2(v_1(s))}\mathrm{d}s\tag{18}$$

可以看出 $v_2(t)$ 是区间$[t_0,T]$上正的不减函数，且有

$$v_2(t_0)=\Phi_1(v_1(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s\qquad v_1(t)\leqslant\Phi_1^{-1}(v_2(t))\qquad t\in[t_0,T]\tag{19}$$

求 $v_2(t)$ 的导函数，得

$$v'_2(t)=g_1(\alpha(t))\frac{\phi_1(v_1(\alpha(t)))v_1^p(t)}{\phi_2(v_1(\alpha(t)))}\qquad t\in[t_0,T]\tag{20}$$

根据 α,v_2,W^{-1} 与$\dfrac{\Phi_1}{\phi_2}$的单调性，由(19)式和(20)式，推出

$$v'_2(t)\leqslant g_1(\alpha(t))\frac{\phi_1(\Phi_1^{-1}(v_2(t)))[\Phi_1^{-1}(v_2(t))]^p}{\phi_2(\Phi_1^{-1}(v_2(t)))}\qquad t\in[t_0,T]$$

即

$$\frac{\phi_2(\Phi_1^{-1}(v_2(t)))\mathrm{d}v_2(t)}{\phi_1(\Phi_1^{-1}(v_2(t)))[\Phi_1^{-1}(v_2(t))]^p}\leqslant g_1(\alpha(t))\mathrm{d}t\qquad t\in[t_0,T]\tag{21}$$

对(21)式两边求积分，得到

$$\Phi_2(v_2(t))\leqslant\Phi_2(v_2(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\mathrm{d}s\qquad t\in[t_0,T]\tag{22}$$

其中 Φ_2 如公式(6)中所定义. 利用关系式(10),(13),(19)和(22)，我们得到

$$u(t)\leqslant v(t)\leqslant v_1(t)\leqslant\Phi_1^{-1}(v_2(t))\leqslant$$

$$\Phi_1^{-1}\left\{\Phi_2^{-1}\left[\Phi_2(v_2(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\mathrm{d}s\right]\right\}\leqslant$$

$$\Phi_1^{-1}\left\{\Phi_2^{-1}\left[\Phi_2\left(\Phi_1(v(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}g_1(s)\mathrm{d}s\right]\right\}\qquad t\in[t_0,\ T] \tag{23}$$

根据 v 的定义和(9)式，我们得到

$$2v(t_0)-k=k+2\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_1(s)\phi_1(u(s))\left[u(s)+\int_{t_0}^{s}g_2(\tau)\phi_2(u(\tau))\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s=v(T) \tag{24}$$

由(23)式和(24)式，我们看出

$$2v(t_0)-k=v(T)\leqslant\Phi_1^{-1}\left\{\Phi_2^{-1}\left[\Phi_2\left(\Phi_1(v(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_1(s)\mathrm{d}s\right]\right\} \tag{25}$$

即

$$\Phi_2[\Phi_1(2v(t_0)-k)]-\Phi_2\left(\Phi_1(v(t_0))+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_1(s)\mathrm{d}s \tag{26}$$

根据假设：

$$G(u)=\Phi_2[\Phi_1(2u-k)]-\Phi_2\left(\Phi_1(u)+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}h_2(s)\mathrm{d}s\right)$$

在区间$[k,\infty)$上是 u 的严格增函数，且 $G(u)$ 有逆函数 G^{-1}. 由(26)式我们可以得到

$$v(t_0)\leqslant G^{-1}\left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_1(s)\mathrm{d}s\right) \tag{27}$$

把(27)式代入(23)式，我们得到所求的估计式(7).

2 应 用

本节我们将利用定理 1 研究下面的 Volterra-Fredholm 型积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}H_1\left[s,\ x(\alpha(s)),\ \int_{t_0}^{\alpha(s)}H_2(\tau,\ x(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s+$$

$$\int_{t_0}^{T}H_1\left[s,\ x(\alpha(s)),\ \int_{t_0}^{\alpha(s)}H_2(\tau,\ x(\tau))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\qquad\forall\, t\in[t_0,\ T] \tag{28}$$

其中 $x\in C^1([t_0,\ T],\ \mathbb{R})$，$\alpha\in C^1([t_0,\ T],\ [t_0,\ T])$ 是严格增函数，且满足 $\alpha(t)\leqslant t$，$\alpha(t_0)=t_0$，$H_1\in C([t_0,\ T]\times\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$，$H_2\in C([t_0,\ T]\times\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.

推论 1 假设积分方程(28)中的函数 H_1,H_2 满足下面的条件：

$$|H_1(s,\ x,\ y)|\leqslant g_1(s)\phi_1(|x|)[|x|+|y|]^p \tag{29}$$

$$|H_2(s,\ x)|\leqslant g_2(s)\phi_2(|x|) \tag{30}$$

其中 g_1,g_2,ϕ_1,ϕ_2,p 与定理 1 中相应函数的定义相同. 如果 $x(t)$ 是积分方程(28)的解，则有估计式

$$|x(t)|\leqslant\Phi_1^{-1}\left\{\Phi_2^{-1}\left[\Phi_2\left(\Phi_1\left(G^{-1}\left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}Ag_1(\alpha^{-1}(s))\mathrm{d}s\right)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(\alpha^{-1}(s))\mathrm{d}s\right)+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}Ag_1(\alpha^{-1}(s))\mathrm{d}s\right]\right\}\qquad t\in[t_0,\ T] \tag{31}$$

其中 $A=\max\limits_{t\in[t_0,\ T]}\dfrac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))}<\infty$，$\Phi_1,\Phi_2,\Phi_1^{-1},\Phi_2^{-1}$ 与定理 1 中相应函数的定义相同，函数

$$G(u)=\Phi_2[\Phi_1(2u-|x_0|)]-\Phi_2\left(\Phi_1(u)+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}g_2(\alpha^{-1}(s))\mathrm{d}s\right)$$

在区间$[|x_0|,\infty)$上是 u 的严格增函数.

证 根据(29),(30)式，由积分方程(28)得出：对 $\forall\, t\in[t_0,\ T]$，不等式

$$|x(t)|\leqslant|x_0|+\int_{t_0}^{t}g_1(s)\phi_1(|x(\alpha(s))|)\left[|x(\alpha(s))|+\int_{t_0}^{\alpha(s)}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s+$$

$$\int_{t_0}^{T}g_1(s)\phi_1(|x(\alpha(s))|)\left[|x(\alpha(s))|+\int_{t_0}^{\alpha(s)}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&|x_0|+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}\frac{g_1(\alpha^{-1}(s))}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\phi_1(|x(s)|)\left[|x(s)|+\int_{t_0}^{s}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s+\\
&\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}\frac{g_1(\alpha^{-1}(s))}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\phi_1(|x(s)|)\left[|x(s)|+\int_{t_0}^{s}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s\leqslant\\
&|x_0|+\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)}Ag_1(\alpha^{-1}(s))\phi_1(|x(s)|)\left[|x(s)|+\int_{t_0}^{s}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s+\\
&\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(T)}Ag_1(\alpha^{-1}(s))\phi_1(|x(s)|)\left[|x(s)|+\int_{t_0}^{s}g_2(\tau)\phi_2(|x(\tau)|)\mathrm{d}\tau\right]^p\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{32}
$$

成立. 不等式(32)具有不等式(4)的形式，不等式(32)中的函数满足定理1的条件，由定理1我们可以得到积分方程(28)中未知函数的估计式(31).

参考文献：

[1] GRONWALL T H. Note on the Derivatives with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations [J]. Ann Math，1919，20(4)：292－296.

[2] AGARWAL R P，DENG Sheng-fu，ZHANG Wei-nian. Generalization of a Retarded Gronwall-Like Inequality and Its Applications [J]. Appl Math Comput，2005，165：599－612.

[3] CHEUNG W S. Some New Nonlinear Inequalities and Applications to Boundary Value Problems [J]. Nonlinear Anal，2006，64：2112－2128.

[4] MA Qing-hua，PEĈARIC J. Estimates on Solutions of Some New Nonlinear Retarded Volterra-Fredholm Type Integral Inequalities [J]. Nonlinear Anal，2008，69：393－407.

[5] ABDELDAIM A，YAKOUT M. On Some New Integral Inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte Type [J]. Appl Math Comput，2011，217：7887－7899.

[6] ZHENG Ke-long. Some Retarded Nonlinear Integral Inequalities in Two Variables and Applications [J]. J Inequal Pure Appl Math，2008，9(2)：322－331.

[7] 王五生. 一个推广的二变量时滞积分不等式及其应用 [J]. 系统科学与数学，2010，30(3)：425－432.

[8] 王五生，罗日才，李自尊. 一类新的非线性时滞差分不等式及其应用 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(5)：59－64.

[9] 王五生，李自尊. 含多个非线性项的时滞积分不等式及其应用 [J]. 数学进展，2012，41(5)：597－604.

[10] 王五生，李自尊. 一类非连续函数积分不等式及其应用 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2012，34(2)：96－100.

A Class of Volterra-Fredholm-Type Nonlinear Iterated Integral Inequalities with p Power

LU Yu-song，　WANG Wu-sheng

School of Mathematics and Statistics，Hechi University，Yizhou Guangxi 546300，China

Abstract：This paper establishes a class of new nonlinear iterated integral inequalities with p power. The estimation of the unknown functions is given clearly by inequality techniques，such as change of variable，amplification method，differential，integration and inverse function. Finally，the result is used to give the estimation of the solutions of a class of Volterra-Fredholm type integral equations.

Key words：integral inequality；iterated integral；p power；estimation

责任编辑　廖　坤