DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.015

偏 b -度量空间中的公共不动点定理[①]

李　健，　邓　磊

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在偏 b -度量空间中引入新型的压缩映象，证明了两个映象的公共不动点定理. 改进和推广了偏 b -度量空间中的不动点理论的某些结论.

关　键　词：偏 b -度量空间；收敛；不动点

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2015)08-0087-05

度量空间中的不动点理论是非线性泛函分析的重要组成部分. 20 世纪 20 年代，波兰数学家 Banach 提出并证明了著名的 Banach 压缩映象定理. 从此以后，许多学者提出了一系列新型的压缩映象概念及新型的压缩映象不动点理论. 其中很多结果已经被成功地应用于研究非线性积分方程、微分方程、泛函微分方程的解的存在唯一性. 文献[1]引入了偏度量空间的概念. 偏度量空间与度量空间的最大不同在于其自距离不为 0. 文献[1]在偏度量空间中证明了 Banach 压缩映象定理. 目前，国内外数学家又将偏度量空间的不动点理论发展到了两个甚至更多的公共不动点理论. 偏度量空间上更多的不动点理论可见文献[2－4].

另一方面，文献[5－6]引入了 b -度量空间的概念，b -度量空间是度量空间的推广，文献[5－6]在其上证明了著名的 Banach 压缩映象原理. 目前，国内外学者讨论了 b -度量空间中各种类型的压缩和非扩张映象、单值与多值映象. b -度量空间上更多的不动点理论可见文献[7－8].

2014 年，文献[9]引入了偏 b -度量空间的概念，在偏 b -度量空间中证明了 Banach 压缩映象与 Kannan-型映象的不动点定理. 本文主要在偏 b -度量空间中考虑两个映象的公共不动点定理，将文献[9]的压缩映像不动点定理推广为两个映象的公共不动点定理.

1　预备知识

定义 1[9]　设 X 是非空集合，设映射 $b: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. 若 $\forall x, y, z \in X$ 满足以下条件：

(i) $b(x, x)=b(x, y)=b(y, y)$ 当且仅当 $x=y$；

(ii) $b(x, x)\leqslant b(y, x)(\forall x, y\in X)$；

(iii) $b(x, y)=b(y, x)(\forall x, y\in X)$；

(iv) $b(x, y)\leqslant s[b(x, z)+b(z, y)]-b(z, z)(\forall x, y, z\in X, s\in\mathbb{R}$ 且 $s\geqslant 1)$.

则称 b 为 X 的偏 b -度量，称 (X, b) 为偏 b -度量空间. 称 s 为偏 b -度量空间 (X, b) 的系数.

定义 2[9]　设 (X, b) 为系数为 s 的偏 b -度量空间. $\{x_n\}$ 为 X 中的任一序列，$\forall x\in X$，则：

(i) 若 $\lim\limits_{n,m\to\infty} b(x_n, x_m)$ 存在且有限，则称序列 $\{x_n\}$ 为 (X, b) 中的柯西序列；

(ii) 若对 X 中的每个柯西列 $\{x_n\}$，存在 $x\in X$，使得

$$\lim_{n,m\to\infty} b(x_n, x_m)=\lim_{n\to\infty} b(x_n, x)=b(x, x)$$

---

① 收稿日期：2014-11-03

基金项目：国家自然科学基金项目(11226228)；河南省教育厅自然科学研究项目(2011B110025).

作者简介：李　健(1990-)，男，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

则称(X, b)为完备的偏b-度量空间.

注1 偏b-度量空间中收敛序列的收敛值不唯一.

定义3 设X是非空集合，$A, T: X \longrightarrow X$，则：

(i) 若对$\forall x \in X$都有$Ax < TAx$与$Tx < ATx$成立，则称两个映射A和T为严格弱增的；

(ii) 设$y \in X$，若存在$x \in X$，使得$y = Tx = Ax$，则称y为A和T的重合点；若

$$Ax = Tx \Rightarrow TAx = ATx$$

则称T, A为弱相容的.

2 主要结论

定理1 令(X, b)为完备偏b-度量空间，$A, T: X \longrightarrow X$为两个严格弱增映射，对$\forall x, y \in X$满足以下条件：

$$b(Ax, Ty) \leqslant \alpha \cdot b(x, y) + L\min\{b(x, Ax), b(y, Ty), b(x, Ty), b(y, Ax)\}$$

其中

$$\alpha \in [0, 1) \qquad L \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \alpha + L < 1$$

若A或者T连续，则A, T有唯一的公共不动点.

证 任取$x_0 \in X$，若$x_0 = Ax_0$或$x_0 = Tx_0$，则有$x_0 = Ax_0 = Tx_0$. 若$x_0 = Ax_0$，则

$$\begin{aligned} b(x_0, Tx_0) = b(Ax_0, Tx_0) \leqslant & \\ & \alpha b(x_0, x_0) + L\min\{b(x_0, x_0), b(x_0, Tx_0)\} \leqslant \\ & (\alpha + L)b(x_0, x_0) < b(x_0, x_0) \end{aligned}$$

矛盾，故$b(x_0, Tx_0) = 0$. 假设$x_0 \neq Ax_0$，$x_0 \neq Tx_0$，定义序列$\{x_n\}$为：

$$x_{2n+1} = Ax_{2n} \qquad x_{2n+2} = Tx_{2n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

由于f, g为严格弱增映象，则

$$x_1 = Ax_0 < TAx_0 = Tx_1 = x_2 = Tx_1 < ATx_1 = Ax_2 = x_3$$

按以上定义得到严格递减的序列$\{x_n\}$，且易知

$$\begin{aligned} & b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = \\ & b(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) \leqslant \\ & \alpha b(x_{2n}, x_{2n+1}) + L\min\{b(x_{2n}, Ax_{2n}), b(x_{2n+1}, Tx_{2n+1}), b(x_{2n}, Tx_{2n+1}), b(x_{2n+1}, Ax_{2n})\} \leqslant \\ & \alpha b(x_{2n}, x_{2n+1}) + Lb(x_{2n+1}, x_{2n+1}) \leqslant \\ & (\alpha + L)b(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

不妨令

$$h = \alpha + L \qquad h \in [0, 1)$$

则

$$b(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leqslant hb(x_{2n}, x_{2n+1})$$

同理,

$$b(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leqslant hb(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

即

$$b(x_n, x_{n+1}) \leqslant hb(x_{n-1}, x_n) \leqslant h^2 b(x_{n-2}, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant h^n b(x_0, x_1)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}_+$，$m > n$，有

$$\begin{aligned} b(x_n, x_m) \leqslant & s[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m)] - b(x_{n+1}, x_{n+1}) \leqslant \\ & sb(x_n, x_{n+1}) + s^2[b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)] - sb(x_{n+2}, x_{n+2}) \leqslant \cdots \leqslant \\ & sb(x_n, x_{n+1}) + s^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{m-n} b(x_{m-1}, x_m) \leqslant \\ & sh^n b(x_1, x_0) + s^2 h^{n+1} b(x_1, x_0) + \cdots + s^{m-n} h^{m-1} b(x_1, x_0) \leqslant \\ & sh^n [1 + sh + (sh)^2 + (sh)^3 + \cdots + (sh)^{m-n}] b(x_1, x_0) \leqslant \end{aligned}$$

$$\frac{sh^n}{1-sh}b(x_1, x_0)$$

由于 $h \in [0, 1)$，则

$$\lim_{n,m\to\infty} b(x_n, x_m) = 0$$

因此，$\{x_n\}$ 为 X 中的柯西列. 由 X 的完备性知，存在 $u \in X$，使得 $x_n \to u(n \to \infty)$. 假设 A 连续，则

$$A(A^n x_0) = A^{n+1}x_0 \to u$$

则 $Au = u$，即 u 为 A 的不动点. 下证 $Tu = u$. 因为

$$\begin{aligned} b(u, Tu) = b(Au, Tu) \leqslant & \\ & \alpha b(u, u) + L\min\{b(u, Au), b(u, Tu), b(u, Ty), b(u, Tx)\} \leqslant \\ & \alpha b(u, u) + Lb(u, Tu) = \\ & (\alpha + L)b(u, u) < b(u, u) \end{aligned}$$

即 u 为 A 和 T 的公共不动点.

假设还存在 u_1，使得 $Au_1 = Tu_1 = u_1$，因为

$$\begin{aligned} b(u, u_1) = b(Au, Tu_1) \leqslant & \\ & \alpha b(u, u_1) + L\min\{b(u, u), b(u_1, u_1), b(u, u_1), b(u_1, U)\} \leqslant \\ & \alpha b(u, u_1) + L\min\{b(u, u), b(u_1, u_1)\} < b(u, u_1) \end{aligned}$$

故

$$u = u_1$$

综上所述，A，T 有唯一的公共不动点.

注 2　若定理 1 中令 $A = T$，$L = 0$，则定理 1 为文献[1]中的定理 1. $L = 0$ 时，定理 1 将文献[1]中定理 1 推广为两个映象的公共不动点定理. 定理 1 进一步地推广了文献[1]的定理 2.

定理 2　令 (X, b) 为完备偏 b -度量空间，映射 A，T：$X \longrightarrow X$，其中 $AX \subseteq TX$，且 AX，TX 中至少有一个为闭集. 若对 $\forall x, y \in X$ 有以下条件成立：

$$b(Ax, Ay) \leqslant \varphi(M(x, y))$$

其中

$$\begin{aligned} & M(x, y) = \\ & \alpha \cdot \max\left\{b(Tx, Ty), b(Ax, Tx), b(Ay, Ty), \frac{1}{2}[b(Ax, Ty) + b(Tx, Ay)]\right\} \qquad \alpha \in \left[0, \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

φ：$[0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ 为连续映象，$\forall t > 0$ 有 $\varphi(t) < t$，$\varphi(0) = 0$.
则 T，A 有唯一的重合点；若 T，A 弱相容，则 T，A 有唯一的公共不动点.

证　任取 $x_0 \in X$，由于 $AX \subseteq TX$. 不妨令

$$y_n = Ax_n = Tx_{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} & b(y_n, y_{n+1}) = b(Ax_n, Ax_{n+1}) \leqslant \\ & \varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(Tx_{n+1}, Tx_n), b(Ax_{n+1}, Tx_{n+1}), b(Ax_n, Tx_n), \frac{1}{2}[b(Ax_{n+1}, Tx_n) + b(Tx_{n+1}, Ax_n)]\right\}\right) = \\ & \varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(y_n, y_{n-1}), b(y_{n+1}, y_n), b(y_n, y_{n-1}), \frac{1}{2}[b(y_{n+1}, y_{n-1}) + b(y_n, y_n)]\right\}\right) \leqslant \\ & \varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(y_n, y_{n-1}), b(y_{n+1}, y_n), \frac{s}{2}[b(y_{n-1}, y_n) + b(y_n, y_{n+1})]\right\}\right) \end{aligned}$$

由 $\varphi(t) < t$ 知

$$b(y_n, y_{n+1}) < \alpha \cdot \max\left\{b(y_n, y_{n-1}), b(y_{n+1}, y_n), \frac{s}{2}[b(y_{n-1}, y_n) + b(y_n, y_{n+1})]\right\} \tag{1}$$

若存在 $b(y_n, y_{n+1}) > b(y_n, y_{n-1})$，由式(1)知

$$b(y_n, y_{n+1}) < \alpha s \cdot b(y_n, y_{n+1}) < b(y_n, y_{n+1})$$

矛盾. 故对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，都有

$$b(y_n, y_{n+1}) \leqslant b(y_n, y_{n-1})$$

则式(1)可化为

$$b(y_n, y_{n+1}) < \alpha s \cdot b(y_{n-1}, y_n)$$

不妨取 $h = \alpha s \in [0, 1)$. 则式(1)化为

$$b(y_n, y_{n+1}) < h \cdot b(y_{n-1}, y_n)$$

即

$$b(y_n, y_{n+1}) < h \cdot b(y_{n-1}, y_n) < h^2 \cdot b(y_{n-2}, y_{n-1}) < \cdots < h^n \cdot b(y_1, y_0)$$

由定理 1 的证明知，$\{y_n\}$ 为 X 中的柯西列. 由 X 的完备性知，存在 $y \in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} b(y_n, y) = \lim_{n,m\to\infty} b(y_n, y_m) = b(y, y) = 0$$

因 AX,TX 中至少有一个为闭集，不妨设 TX 为闭集. 则存在 $u \in X$，使得 $Tu = y$. 下证 $Au = y$. 事实上，

$$\begin{aligned}
&b(y, Au) \leqslant sb(y, Ax_n) + sb(Ax_n, Au) \leqslant \\
&sb(y, Ax_n) + s\varphi(M(x_n, u)) \leqslant \\
&sb(y, Ax_n) + s\varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(Tx_n, Tu), b(Ax_n, Tx_n), b(Au, Tu), \frac{1}{2}[b(Ax_n, Tu) + b(Tx_n, Au)]\right\}\right) = \\
&sb(y, Ax_n) + s\varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(y_{n-1}, Tu), b(y_n, y_{n-1}), b(Au, y), \frac{1}{2}[b(y_n, y) + b(y_{n-1}, Au)]\right\}\right)
\end{aligned}$$

由于 $y_n \to y = Tu (n \to \infty)$，则存在 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有：

$$b(y_{n-1}, Tu) < b(Au, y) \qquad b(y_{n-1}, y_n) < b(Au, y)$$

即

$$b(y, Au) \leqslant sb(y, y_n) + s\varphi\left(\alpha \max\left\{b(Au, y), \frac{1}{2}[b(y_n, y) + b(y_{n-1}, Au)]\right\}\right)$$

令 $n \to \infty$，得

$$b(y, Au) \leqslant 0 + s\varphi(\alpha b(Au, y)) < s\alpha b(Au, y) < b(Au, y)$$

矛盾. 则 $b(Au, y) = 0$. 所以 $y = Au = Tu$，即 A,T 有重合点 y. 下证重合点唯一. 假设还存在 $y_1 \neq y$，使得 $Au_1 = Tu_1 = y_1$，则

$$\begin{aligned}
&b(y, y_1) = b(Au, Au_1) \leqslant \\
&\qquad \varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(Tu, Tu_1), b(Au, Tu), b(Au_1, Tu_1), \frac{1}{2}[b(Au, Tu_1) + b(Tu, Au_1)]\right\}\right) \leqslant \\
&\qquad \varphi\left(\alpha \cdot \max\left\{b(y, y_1), b(y, y), b(y_1, y_1), \frac{1}{2}[b(y, y_1) + b(y, y_1)]\right\}\right) \leqslant \\
&\qquad \varphi(\alpha \cdot b(y, y_1)) \leqslant \alpha \cdot b(y, y_1)
\end{aligned}$$

矛盾. 故不存在 $y_1 \neq y$，使得 $Au_1 = Tu_1 = y_1$. 即重合点唯一.

由 $Au = Tu = y$ 以及 A,T 弱相容，知 $ATu = TAu$. 因为重合点唯一，所以 $Tu = Au = u$，即 u 为 A,T 的公共不动点，唯一性显然.

注 3 若定理 2 中令 $A = T$，$\varphi(t) = (1-\beta)t$，$\beta \in (0, 1)$ 时，定理 2 即为文献[1]中定理 3 的推广. 定理 2 将文献[1]中的不动点定理推广为两个映象的公共不动点定理.

参考文献：

[1] MATTHEWS S G. Partial Metric Topology: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Application [C]. New York: Acad Sci, 1994.

[2] ALTUM I, SOLA F, SIMSEK H. Generalized Contraction on Partial Metric Spaces [J]. Topology Appl, 2010, 157(8): 2778-2785.

[3] ALTUM I, ERDURAN A. Fixed Point Theorems for Monotone Mappings on Partial Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory Appl, 2011, 2011(12): 1-10.

[4] HARJANI J, SADARANGANI K. Fixed Point Theorems for Weakly Contractive Mappings in Partial Ordered Set [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(7-8): 3403-3410.

[5] BAKHTIN I A. The Contraction Mapping Principle in Quasimetric Spaces [J]. Funct Anal Unianowsk Gos Ped Inst, 1989, 30: 26-37.

[6] CZERWIK S. Contraction Mappings in b-Metric Spaces [J]. Acta Mathemaic Et Informatica Universitis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5-11.

[7] CZERWIK S. Nonlinear Set-Valued Contraction Mappings in b-Metric Spaces [J]. Atti Sem Mat Univ Modena, 1998, 46: 263-276.

[8] HUSSAIN N, SHAH M H. KKM Mappings in Cone b-Metric Spaces [J]. Comput Math Appl, 2011, 62(9): 1677-1684.

[9] SATISH S. Partial b-Metric Spaces and Fixed Point Theorems [J]. Mediter J Math, 2014, 25(11): 703-711.

[10] 刘改平，邓　磊. 弱压缩多值映像在偏序度量空间中的耦合不动点定理 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(12)：126-129.

[11] 巨小维，顾　贞，于莉琦. 锥度量空间中一类扩张映射的公共不动点定理 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2014，36(11)：112-116.

[12] 汪　凯，王　莹. (φ, φ)-g-弱压缩映射的公共耦合不动点定理 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2014，39(4)：26-29.

Common Fixed Point Theorems in Partial b-Metric Spaces

LI　Jian，　DENG　Lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a new contractive mapping is introduced into partial b-metric spaces to prove some common fixed point theorems for two mappings, thus improving and extending some conclusions about partial b-metric spaces.

Key words: partial b-metric space; contraction; fixed point

责任编辑　廖　坤