DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.016

射影 Ricci 曲率及其射影不变性①

程新跃， 马小玉， 沈玉玲

重庆理工大学 数学与统计学院，重庆 400054

摘要： 研究了芬斯勒几何中一类新的几何量，即射影 Ricci 曲率. 刻划了两个射影等价的芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率的关系. 特别地，在一个给定体积形式的流形上，如果两个芬斯勒度量 F 和 $\overline{F}$ 是射影等价的，那么它们的射影 Ricci 曲率是相等的，即此时的射影 Ricci 曲率是射影不变量.

关 键 词： 芬斯勒度量；Ricci 曲率；S-曲率；射影 Ricci 曲率；射影不变量

中图分类号：O186.13 **文献标志码：A** **文章编号：** 1673-9868(2015)08-0092-05

芬斯勒几何中的 Ricci 曲率 $\boldsymbol{Ric}$ 是黎曼几何中的 Ricci 曲率的自然拓广，在芬斯勒几何中扮演着十分重要的角色. 文献[1]证明了：如果 F 和 $\overline{F}$ 是 n 维紧致流形 M 上射影等价的爱因斯坦度量，那么它们的爱因斯坦常数是同号的；另外，如果它们的爱因斯坦常数是负的且相等，那么有 $F=\overline{F}$. 文献[2]给出了芬斯勒射影几何中关于 Ricci 曲率的比较定理. 芬斯勒几何中的 S-曲率 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(x,y)$ 是一类重要的非黎曼几何量. 文献[3]证明了黎曼几何中的 Bishop-Gromov 体积比较定理对具有零 S-曲率的芬斯勒流形仍然成立. 文献[4]证明了：S-曲率和 Ricci 曲率决定了在芬斯勒流形中与一个点邻近的小度量球的 Busemann-Hausdroff 测度的局部行为. 文献[5-6]研究和揭示了 (α,β)-度量的 S-曲率和 Ricci 曲率的性质.

一个自然的问题是，如何利用 Ricci 曲率和 S-曲率进一步深入刻划芬斯勒度量的性质和结构. 芬斯勒度量 F 的射影 Ricci 曲率 $\boldsymbol{PRic}$ 定义为

$$\boldsymbol{PRic}=\boldsymbol{Ric}+(n-1)\{\widetilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m+\widetilde{\boldsymbol{S}}^2\}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}=\frac{\boldsymbol{S}}{n+1}$$

这里"|"表示关于 F 的水平协变导数，事实上，射影 Ricci 曲率概念的雏形可追溯到文献[7].

本文将着重研究在芬斯勒度量的射影变换下，射影 Ricci 曲率的变化规律，并研究其射影不变性. 我们首先有：

定理 1 设 F 和 $\overline{F}$ 是 n 维流形 M 上射影等价的芬斯勒度量，那么它们的射影 Ricci 曲率 $\boldsymbol{PRic}$ 与 $\overline{\boldsymbol{PRic}}$ 有如下关系：

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=(n-1)\left[\frac{2}{n+1}\boldsymbol{S}+\varphi\right]\varphi+(n-1)y^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-2(n-1)G^l\frac{\partial\varphi}{\partial y^l}$$

其中

$$\varphi=y^m\frac{\partial[\ln f]}{\partial x^m}\qquad f(x)=\left(\frac{\sigma_F(x)}{\sigma_{\overline{F}}(x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

这里 $\sigma_F(x)$ 和 $\sigma_{\overline{F}}(x)$ 分别表示 F 和 $\overline{F}$ 的体积系数.

特别地，根据定理 1，我们可以得到下面的结论：

---

① 收稿日期：2014-11-16

基金项目：国家自然科学基金项目(11371386)；欧盟 FP7(SEVENTHFRAMEWORKPROGRAMME)资助项目(PIRSES-GA-2012-317721).

作者简介：程新跃(1958-)，男，重庆人，教授，主要从事微分几何的研究.

通信作者：马小玉，硕士研究生.

定理 2　在一个给定体积形式的流形 M 上，如果 F 和 $\overline{F}$ 是射影等价的芬斯勒度量，那么它们的射影 Ricci 曲率相等，即 $\overline{\boldsymbol{PRic}}=\boldsymbol{PRic}$.

我们所得到的结论为进一步深入揭示射影 Ricci 曲率的性质及其对芬斯勒空间结构的影响，以及探讨射影 Ricci 曲率在芬斯勒射影几何中所扮演的角色有重要意义.

流形 M 上的每个芬斯勒度量 F 都诱导了一个射流 $\boldsymbol{G}$，其定义为

$$\boldsymbol{G}=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

其中 G^i 定义为

$$G^i(x,y)=\frac{1}{4}g^{il}\left\{\frac{\partial^2[F^2]}{\partial x^k\partial y^l}y^k-\frac{\partial[F^2]}{\partial x^l}\right\}$$

我们称 G^i 为 F 的测地系数. 芬斯勒度量 F 的测地线 $\sigma=\sigma(t)$ 由下述方程刻划：

$$\ddot{\sigma}^i(t)+2G^i(\sigma(t),\dot{\sigma}(t))=0$$

其中 $\dot{\sigma}(t)=\dot{\sigma}^i(t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

黎曼几何中的黎曼曲率概念可以推广到芬斯勒几何中. 对于 $\forall\, y\in T_xM\backslash\{0\}$，黎曼曲率 $\boldsymbol{R}_y:T_xM\longrightarrow T_xM$ 定义为

$$\boldsymbol{R}_y(u)=R^i_k(y)u^k\frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中

$$R^i_k(y)=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}y^j+2G^j\frac{\partial^2G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}\tag{1}$$

黎曼曲率 $\boldsymbol{R}_y$ 的迹是切丛 TM 上的数量函数 $\boldsymbol{Ric}$：

$$\boldsymbol{Ric}(y)=R^m_m(y)\tag{2}$$

$\boldsymbol{Ric}$ 称为芬斯勒度量的 Ricci 曲率.

如果两个芬斯勒度量具有相同的测地线(作为点集)，那么就称这两个芬斯勒度量是射影等价的. 在 n 维流形 M 上给定两个芬斯勒度量 F 和 $\overline{F}$，令 G 和 $\overline{G}$ 分别是 F 和 $\overline{F}$ 诱导的射流，那么很容易就可以得到

$$\overline{G}^i=G^i+\frac{\overline{F}_{|k}y^k}{2\overline{F}}y^i+\frac{\overline{F}}{2}\overline{g}^{il}\left\{\frac{\partial\overline{F}_{|k}}{\partial y^l}y^k-\overline{F}_{|l}\right\}$$

其中 $\overline{F}_{|k}$ 表示的是在(M,F)上 $\overline{F}$ 的协变导数：

$$\overline{F}_{|k}=\frac{\partial\overline{F}}{\partial x^k}-\frac{\partial G^l}{\partial y^k}\frac{\partial\overline{F}}{\partial y^l}$$

因此我们有下面的著名引理：

引理 1[7-8]　在流形 M 上，两个芬斯勒度量 F 和 $\overline{F}$ 射影等价的充要条件是

$$\frac{\partial\overline{F}_{|k}}{\partial y^l}y^k-\overline{F}_{|l}=0$$

这时

$$\overline{G}^i=G^i+Py^i\tag{3}$$

其中

$$P=\frac{\overline{F}_{|k}y^k}{2\overline{F}}\tag{4}$$

由(3)式，可得

$$\overline{G}^i_j=G^i_j+P\delta^i_j+P_{y^j}y^i\tag{5}$$

设 F 和 $\overline{F}$ 是 n 维流形 M 上射影等价的芬斯勒度量. 由(1),(2)和(3),(4)式可得：

$$\overline{\boldsymbol{R}}_y(u)=\boldsymbol{R}_y(u)+\Xi(y)u+\tau_y(u)y$$

$$\overline{\boldsymbol{Ric}}(y)=\boldsymbol{Ric}(y)+(n-1)\Xi(y)\tag{6}$$

在局部坐标(x^i,y^i)下，有

$$\overline{R}^i_k=R^i_k+\Xi(y)\delta^i_k+\tau_k(y)y^i$$

其中

$$\Xi=P^2-P_{|k}y^k$$

$$\tau_y(y)=3\left(P_{|k}-\frac{1}{2}\frac{\partial[P^2]}{\partial y^k}\right)u^k+\frac{\partial \Xi}{\partial y^k}u^k$$

这里 $P_{|k}$ 表示的是 P 关于 F 的水平协变导数：

$$P_{|k}=\frac{\partial P}{\partial x^k}-\frac{\partial G^l}{\partial y^k}\frac{\partial P}{\partial y^l}$$

考虑芬斯勒流形(M, F)的体积形式 $\mathrm{d}V=\sigma_F(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$. 那么芬斯勒度量 F 的 S-曲率定义为

$$\boldsymbol{S}=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-y^m\frac{\partial(\ln \sigma_F(x))}{\partial x^m}$$

其中 $\sigma_F(x)$ 表示芬斯勒度量 F 的体积系数. 特别地，芬斯勒流形的 Busemann-Hausdoff 体积形式 $\mathrm{d}V=\sigma_F(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$ 定义为

$$\sigma_F(x)=\frac{\mathrm{Vol}(B^n(1))}{\mathrm{Vol}\{(y^i)\in\mathbb{R}^n \mid g_{ij}y^iy^j<1\}}$$

这里，$B^n(1)$ 表示欧氏空间中的单位球体，Vol 表示标准欧氏体积.

当考虑两个射影等价的芬斯勒度量时，很自然地要刻划它们的 S-曲率的关系.

引理 2[2]　设 F 和 $\overline{F}$ 是 n 维流形 M 上射影等价的芬斯勒度量，那么射影因子 P 为

$$P=\frac{1}{n+1}(\overline{\boldsymbol{S}}-\boldsymbol{S})-y^i\frac{\partial}{\partial x^i}[\ln f]$$

其中 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\left(\frac{\sigma_F(x)}{\sigma_{\overline{F}}(x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}\qquad \mathrm{d}V_{\overline{F}}=\frac{1}{f^{n+1}}\mathrm{d}V_F$$

这里 $\sigma_F(x)$ 和 $\sigma_{\overline{F}}(x)$ 分别表示 F 和 $\overline{F}$ 的体积系数.

由引理 2 可容易地确定两个射影等价的芬斯勒度量的 S-曲率的关系.

定理 1 的证明

设 F 和 $\overline{F}$ 是 n 维流形 M 上射影等价的芬斯勒度量，根据引理 2，可得 S-曲率之间的关系：

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}+(n+1)P+(n+1)y^i\frac{\partial}{\partial x^i}[\ln f]$$

由定义，$f(x)$ 是 M 上正的函数.

由定义，F 和 $\overline{F}$ 的射影 Ricci 曲率分别为：

$$\boldsymbol{PRic}=\boldsymbol{Ric}+(n-1)\{\widetilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m+\widetilde{\boldsymbol{S}}^2\}\tag{7}$$

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}=\overline{\boldsymbol{Ric}}+(n-1)\{\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^2\}\tag{8}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}=\frac{\boldsymbol{S}}{n+1}\qquad \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}=\frac{1}{n+1}\overline{\boldsymbol{S}}$$

这里，“|”及“‖”分别表示 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 和$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}$ 关于 F 和 $\overline{F}$ 的协变导数，$\boldsymbol{S}$ 和 $\overline{\boldsymbol{S}}$ 分别是 F 和 $\overline{F}$ 的 S-曲率.

把(6) 式代入(8) 式中，可得

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}=\boldsymbol{Ric}+(n-1)\Xi+(n-1)\{\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^2\}\tag{9}$$

其中

$$\Xi=P^2-P_{|k}y^k$$

结合(7) 式和(9) 式，可知

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=&(n-1)\Xi+(n-1)\{\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^2-\widetilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m-\widetilde{\boldsymbol{S}}^2\}=\\&(n-1)\{(\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^2+P^2-P_{|m}y^m)-(\widetilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m+\widetilde{\boldsymbol{S}}^2)\}\end{aligned}\tag{10}$$

令

$$A=\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}^2+P^2-P_{|m}y^m\tag{11}$$

$$B=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m+\widetilde{\boldsymbol{S}}^2\tag{12}$$

(10) 式可化为

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=(n-1)(A-B)\tag{13}$$

根据 S-曲率的定义，我们知道

$$\tilde{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{n+1}\boldsymbol{S}=\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-\frac{1}{n+1}\varphi_0 \tag{14}$$

这里
$$\varphi_0=y^m\frac{\partial[\ln\sigma_F(x)]}{\partial x^m} \tag{15}$$

同理
$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}=\frac{1}{n+1}\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{n+1}\frac{\partial\bar{G}^m}{\partial y^m}-\frac{1}{n+1}\bar{\varphi}_0 \tag{16}$$

这里
$$\bar{\varphi}_0=y^m\frac{\partial[\ln\sigma_{\bar{F}}(x)]}{\partial x^m} \tag{17}$$

根据(14)—(17)式以及(3),(5)式，我们可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}=&\frac{\partial\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}}{\partial x^m}-\frac{\partial\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}}{\partial y^l}\bar{G}^l_m=\\&\tilde{\boldsymbol{S}}_{|m}+\frac{1}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^m}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^l}G^l_m-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial x^m}+\frac{1}{n+1}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial y^l}G^l_m-\\&\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2G^k}{\partial y^k\partial y^m}P-\frac{1}{n+1}\frac{\partial G^k}{\partial y^k}P_{y^m}-P_{y^l}G^l_m-2PP_{y^m}+\frac{1}{n+1}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial y^m}P+\\&\frac{1}{n+1}P_{y^m}\bar{\varphi}_0+\frac{\partial P}{\partial x^m}\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{|m}=\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2G^k}{\partial y^k\partial x^m}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^m}-\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2G^k}{\partial y^k\partial y^l}G^l_m+\frac{1}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^l}G^l_m \tag{19}$$

把(16),(18)式代入(11)式，以及把(14),(19)式代入(12)式，可知

$$\begin{aligned}A-B=&(\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_{\|m}y^m+\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}^2+P^2-P_{|m}y^m)-(\tilde{\boldsymbol{S}}_{|m}y^m+\tilde{\boldsymbol{S}}^2)=\\&\frac{1}{(n+1)^2}\bar{\varphi}_0^2-\frac{2}{(n+1)^2}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\bar{\varphi}_0-\frac{1}{(n+1)^2}\varphi_0^2+\frac{2}{(n+1)^2}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\varphi_0+\\&\frac{1}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^m}y^m-\frac{2}{n+1}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^l}G^l-\frac{1}{n+1}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial x^m}y^m+\frac{2}{n+1}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial y^l}G^l\end{aligned} \tag{20}$$

根据引理 2，由(15)和(17)式可知

$$\bar{\varphi}_0-\varphi_0=-(n+1)y^m\frac{\partial[\ln f]}{\partial x^m} \tag{21}$$

把(21)式代入(20)式，并且由(3)式及(5)式可知

$$\begin{aligned}A-B=&-\frac{1}{n+1}(\bar{\varphi}_0+\varphi_0)\varphi+\frac{2}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\varphi+y^iy^j\frac{\partial^2[\ln f]}{\partial x^i\partial x^j}-2G^l\frac{\partial\varphi}{\partial y^l}=\\&\left[\frac{1}{n+1}(\bar{\boldsymbol{S}}+\boldsymbol{S})-P\right]\varphi+y^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-2G^l\frac{\partial\varphi}{\partial y^l}\end{aligned} \tag{22}$$

这里，我们令 φ 为

$$\varphi=y^m\frac{\partial[\ln f]}{\partial x^m} \tag{23}$$

把(22)式代入(13)式中，得

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=&(n-1)(A-B)=\\&(n-1)\left[\frac{1}{n+1}(\bar{\boldsymbol{S}}+\boldsymbol{S})-P\right]\varphi+(n-1)y^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-2(n-1)G^l\frac{\partial\varphi}{\partial y^l}\end{aligned}$$

其中

$$P=\frac{1}{n+1}(\bar{\boldsymbol{S}}-\boldsymbol{S})-y^i\frac{\partial}{\partial x^i}[\ln f]$$

因此可得

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=(n-1)\left[\frac{2}{n+1}\boldsymbol{S}+\varphi\right]\varphi+(n-1)y^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-2(n-1)G^l\frac{\partial\varphi}{\partial y^l}$$

其中 φ 正如(23)式定义.

定理 2 的证明

设 F 和 $\overline{F}$ 是给定了体积形式的 n 维流形 M 上射影等价的芬斯勒度量. 此时，$\sigma_{\overline{F}}(x)=\sigma_F(x)=\sigma(x)$. 那么根据引理 2，可知

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}+(n+1)P$$

在这种情形下，可以得到

$$\overline{\varphi}_0=y^m\frac{\partial[\ln\sigma_{\overline{F}}]}{\partial x^m}=y^m\frac{\partial[\ln\sigma_F]}{\partial x^m}=\varphi_0 \tag{24}$$

把(24)式代入(20)式中，得

$$A-B=0 \tag{25}$$

把(25)式代入(13)式中，得

$$\overline{\boldsymbol{PRic}}-\boldsymbol{PRic}=(n-1)(A-B)=0$$

综上所述，在一个给定体积形式的流形上，如果两个芬斯勒度量 F 和 $\overline{F}$ 是射影等价的，那么它们的射影 Ricci 曲率是相等的，即此时的射影 Ricci 曲率是射影不变量.

参考文献：

[1] SHEN Zhong-min. On Projectively Related Einstein Metrics in Riemann-Finsler Geometry [J]. Math Ann，2001，320：625－647.

[2] CHENG Xin-yue，SHEN Zhong-min. A Comparison Theorem on the Ricci Curvature in Projective Geometry [J]. Annals of Global Analysis and Geometry，2003，23：141－155.

[3] SHEN Zhong-min. Volume Comparison and Its Applications in Riemann-Finsler Geometry [J]. Advances in Math，1997，128：306－328.

[4] SHEN Zhong-min. Lectures on Finsler Geometry [M]. Singapore：World Scientific，2001.

[5] CHENG Xin-yue，SHEN Zhong-min. A Class of Finsler Metrics with Isotropic S-Curvature [J]. Isral Journal of Mathematics，2009，169(1)：317－340.

[6] CHENG Xin-yue，SHEN Zhong-min，TIAN Yan-fang. A Class of Einstein (α,β)-Metrics [J]. Isral Journal of Mathematics，2012，192：221－249.

[7] SHEN Zhong-min. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces [M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2001.

[8] CHEN Xing-shen，SHEN Zhong-min. Rieman-Finsler Geometry [M]. Singapore：World Scientific，2005.

[9] SHEN Zhong-min. On Some Non-Riemannian Quantities in Finsler Geometry [J]. Canadian Mathematical Bulletin，2013，56(1)：184－193.

[10] BAO D，ROBLES C. On Ricci Curvature and Flag Curvature in Finsler Geometry [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2004.

Projective Ricci Curvature and Its Projective Invariance

CHENG Xin-yue，　MA Xiao-yu，　SHEN Yu-ling

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University of Technology，Chongqing 400054，China

Abstract：In this paper，we study a new class of geometric quantities in Finsler geometry，that is，the projective Ricci curvature. We characterize the relations between two projective Ricci curvatures for two projective equivalent Finsler metrics. In particular，we show that，if the Finsler metrics F and $\overline{F}$ are projectively equivalent on a manifold with a fixed volume form，then their projective Ricci curvatures are equal. In other words，the projective Ricci curvature is a projective invariant in this case.

Key words：Finsler metric；Ricci curvature；S-curvature；projective Ricci curvature；projective invariant

责任编辑　廖　坤